L'essentiel de 1re S

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

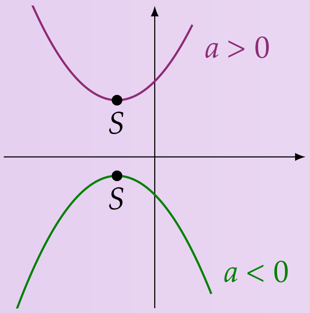
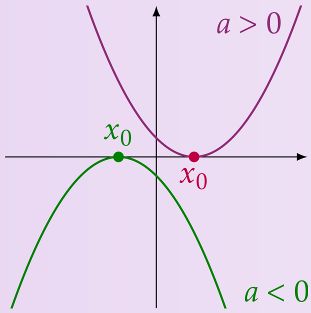
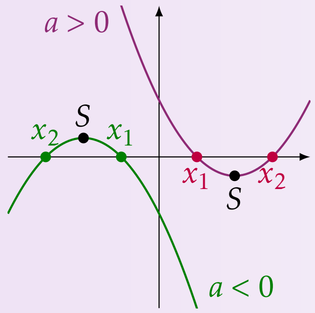
Fiche

par
Stéphane PASQUET

4 septembre 2018

Le second degré

$P(x) = ax^2 + bx + c$. **Discriminant :** $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Pas de racines	1 racine	2 racines
	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Pas de factorisation	$P(x) = a(x-x_0)^2$	$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
		

Forme canonique : $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$. **Sommet :** $S(\alpha\,;\beta)$

Suites

Suites arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + r$ $\quad u_n = u_0 + nr$ ou encore $u_n = u_p + (n-p)r$.

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (\text{nb. termes}) \times \frac{1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques : $u_{n+1} = qu_n$ $\quad u_n = u_0 \times q^n$ ou encore $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb. termes}}}{1-q} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Sens de variation : Si $u_{n+1} - u_n > 0$, (u_n) est croissante.
Si $u_n > 0$ et si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, (u_n) est croissante.

Dérivation

Taux d'accroissement de f au point d'abscisse a : $\tau(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Nombre dérivé de f au point d'abscisse a : $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \tau(h)$.

Nombre dérivé = coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a

Équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$ku,\ k \in \mathbb{R}^*$	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Valeur absolue

Définition : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Distance : $|x-y|$ = distance entre x et y.

Vecteurs & droites

$A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.

Coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Norme : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$

Relations de Chasles sur les vecteurs : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Déterminant : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = xy' - x'y$.

Colinéarité : $\vec{u} = k\vec{v} \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (il sont la même direction)
$\iff \det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$

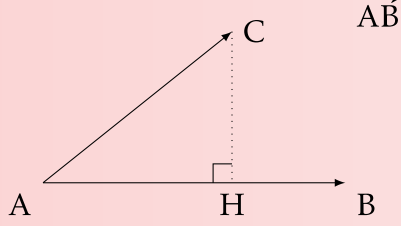
Alignement de points : A, B et C sont alignés $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Coefficient directeur de (AB) : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Équation cartésienne de (AB) : $ax + by + c = 0$, où $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Trouver une équation cartésienne de (AB) : $M(x;y) \in (AB) \iff \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0$.

Produit scalaire



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\ &= AB\times AH \text{ (si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont dans le même sens)}\\ &= -AB\times AH \text{ (si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ pas dans le même sens)}\end{aligned}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' \text{ avec } \vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.$$

Vecteurs orthogonaux : $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$

Vecteur normal : $(d)\ :\ ax+by+c=0.$ $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).

Équation d'un cercle : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $\Omega\,(a\,;b)$ centre du cercle de rayon r.

Théorème de la médiane : $AB^2+AC^2=\frac{1}{2}BC^2+2AI^2$, I milieu de [BC].

Formule d'Al-Kashi : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

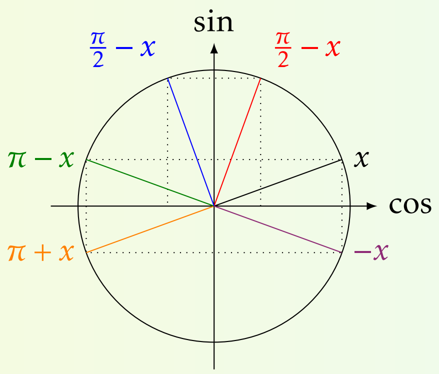
Trigonométrie

Angles (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Formules d'addition
$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

Formules de duplication
$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$
$=2\cos^2 a-1$
$=1-2\sin^2 a$
$\sin 2a=2\sin a\cos a$

Formules de rotation
$\cos(\pi+x)=-\cos x$
$\sin(\pi+x)=-\sin x$
$\cos(\pi-x)=-\cos x$
$\sin(\pi-x)=\sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$



Statistiques descriptives

Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_ix_i$ avec $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Variance : $\mathrm{V} = \dfrac{1}{N}\left[n_1\left(\overline{x} - x_1\right)^2 + n_2\left(\overline{x} - x_2\right)^2 + \cdots + n_k\left(\overline{x} - x_k\right)^2\right] = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\overline{x} - x_i\right)^2$

$V = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_ix_i^2 - \overline{x}^2$ (formule de König-Huygens)

Écart-type : $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}}$

Probabilités

$\mathrm{X} = \{x_1 \,;\, x_2 \,;\, \cdots \,;\, x_n\}$ variable aléatoire de loi de probabilité $(x_i\,;p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Espérance : $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$

Variance : $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[x_i - \mathbb{E}(\mathrm{X})\right]^2 \times p_i$

Écart-type : $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathbb{V}(\mathrm{X})}$.

Propriétés : $\mathbb{E}(a\mathrm{X}+b) = a\mathbb{E}(\mathrm{X}) + b$, $\mathbb{V}(a\mathrm{X}) = a^2\mathbb{V}(\mathrm{X})$ et $\sigma(a\mathrm{X}+b) = |\,a\,|\,\sigma(\mathrm{X})$

Loi binomiale : $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;p)$. Alors, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$

$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = np$ $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = np(1-p)$ $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Fluctuation & échantillonnage

On considère un échantillon d'effectif $n \geqslant 25$ au sein d'une population et on y observe un caractère, de probabilité p telle que $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$. La fréquence de ce caractère dans cette population est notée f.

Intervalle de fluctuation au seuil de 95 % vu en 2nde : $I = \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Cas d'une fréquence liée à une variable aléatoire suivant une loi binomiale : X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$, $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{X}}{n}$ est la variable aléatoire représentant les fréquences possibles du succès sur les n répétitions.

Un intervalle de fluctuation de F au seuil de 95 % est un intervalle $I = \left[\dfrac{a}{n}\,;\dfrac{b}{n}\right]$ où :

- a est le plus petit entier tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant a) > 2,5\,\%$;
- b est le plus petit entier tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant b) \geqslant 97,5\,\%$.

Prise de décision : si $f \notin I$, alors on peut rejeter l'hypothèse selon laquelle l'échantillon est représentatif de la population.