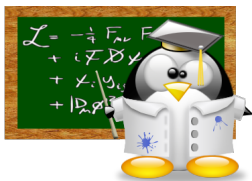




# Sommaire

Tangente à une courbe en un point . . . . .	2
Découverte du nombre dérivé . . . . .	2
Notation d'une limite . . . . .	3
Nombre dérivé en $a$ . . . . .	3
Fonction dérivable . . . . .	4
Fonction dérivée . . . . .	4
Fonctions dérivées usuelles . . . . .	5
Dérivée d'une somme de fonctions . . . . .	5
Dérivée d'un produit d'une fonction par une constante . . . . .	5
Dérivée d'un produit de fonctions . . . . .	5
Dérivée d'un quotient de fonctions . . . . .	6
Équation de la tangente . . . . .	7
Variations et dérivée . . . . .	7
Extremum d'une fonction . . . . .	8



## Prérequis

- Calcul du coefficient directeur d'une droite sachant les coordonnées de deux points de cette droite

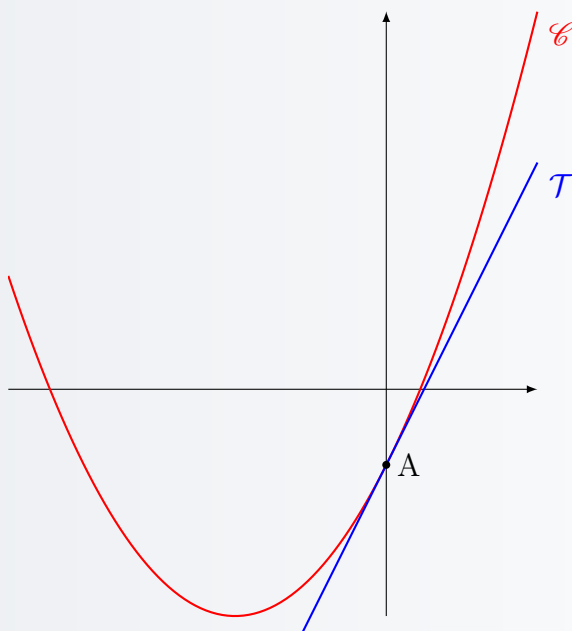
## Définition

### Tangente à une courbe en un point

Soit  $f$  une fonction, de courbe représentative  $\mathcal{C}$ .

On appelle **tangente** à  $\mathcal{C}$  en A la droite  $\mathcal{T}$  qui « frôle »  $\mathcal{C}$  en A.

## Exemple



Ici,  $\mathcal{T}$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  en A.

On notera fréquemment cette tangente :  $\mathcal{T}_A$ .

## Activité

### Découverte du nombre dérivé

On considère une fonction  $f$  telle que sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  soit « en un seul morceau » sur un intervalle  $I$ .

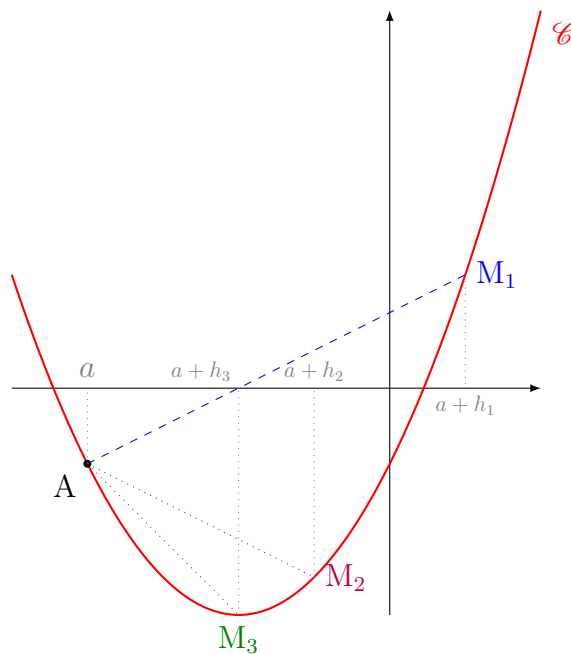
On considère alors deux points  $A(a; f(a))$  et  $M(a+h; f(a+h))$  de  $\mathcal{C}$ , avec  $a \in I$  et  $h > 0$  tel que  $a+h \in I$ .

- 1 Déterminer une expression du coefficient directeur de (AM) en fonction de  $a$  et  $h$ .  
On le notera  $\tau(h)$ .
- 2 Que se passe-t-il pour (AM) si  $h$  se rapproche de 0?  
Conclure alors sur le coefficient directeur de la tangente en A à  $\mathcal{C}$ .

- 1 Le coefficient directeur de (AM) est :

$$\tau(h) = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

**2** Si  $h$  se rapproche de 0, alors  $M$  se rapproche de  $A$  :



Dans ce cas, (AM) se rapproche de la tangente en  $A$  à  $\mathcal{C}$ .

Ainsi, si  $h$  se rapproche de 0,  $\tau(h)$  se rapproche du coefficient directeur de  $\mathcal{T}_A$ .

### Notation

*Notation d'une limite*

On notera :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

le nombre « limite » auquel on arrive lorsque l'on calcule  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  pour  $h$  se rapprochant de plus en plus de 0.

### Définition

*Nombre dérivé en  $a$*

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant  $a$ , de courbe représentative  $\mathcal{C}$ .

On appelle **nombre dérivé de  $f$  en  $a$**  le coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ , c'est-à-dire, d'après l'activité précédente :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

On notera alors  $f'(a)$  ce nombre dérivé de  $f$  en  $a$ .

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

### Remarque

Il est important d'associer  $f'(a)$  au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a$ .

**Définition***Fonction dérivable*

On dit qu'une fonction  $f$  est **dérivable en  $a$**  si  $f'(a)$  existe et n'est pas infini.

On dit que  $f$  est **dérivable sur un intervalle  $I$**  si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ .

**Exemple**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2$ .

Est-elle dérivable en 2 ? Pour le savoir, regardons si  $f'(2)$  existe.

Pour cela, exprimons d'abord  $\tau(h)$  (que l'on appelle le taux d'accroissement de  $f$ ) :

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \frac{(2+h-2)(2+h+2)}{h} \\ &= \frac{h(4+h)}{h} \\ &= 4+h \quad \text{avec } h \neq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, si  $h$  se rapproche de 0,  $\tau(h)$  se rapproche de  $4+0=4$  et donc :

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4.$$

$f'(2)$  existe donc  $f$  est dérivable en 2.

**Définition***Fonction dérivée*

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

On appelle **fonction dérivée de  $f$**  la fonction notée  $f'(x)$  qui à un réel  $x$  de  $I$  associe le nombre dérivé  $f'(x)$ .

**Exemple**

Soit  $f(x) = x^2$ , et soit  $a \in \mathbb{R}$ . Le taux d'accroissement de  $f$  est :

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{(a+h-a)(a+h+a)}{h} \\ &= \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= 2a+h \quad \text{avec } h \neq 0.\end{aligned}$$

...

### Exemple (suite)

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a.$$

Par conséquent, la dérivée de la fonction  $f$  est :

$$f'(x) = 2x.$$

### Propriété

*Fonctions dérivées usuelles*

$f(x)$	$f'(x)$	Remarques
$k$	0	$k \in \mathbb{R}$
$x$	1	$x \in \mathbb{R}$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$

### Propriété

*Dérivée d'une somme de fonctions*

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ . Alors,

$$(u + v)' = u' + v'.$$

### Propriété

*Dérivée d'un produit d'une fonction par une constante*

Soient  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $k$  un réel. Alors,

$$(ku)' = ku'.$$

### Exemple

Soit  $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$ .

Alors,  $f'(x) = 5(x^2)' - 3(x)' + (7)'$

$$= 5 \times 2x - 3 \times 1 + 0$$

$$= 10x - 3.$$

## Propriété

## Dérivée d'un produit de fonctions

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ . Alors,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

## Démonstration

Calculons le taux d'accroissement de la fonction  $uv$  en  $a$  :

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a) - u(a+h)v(a) + u(a+h)v(a+h)}{h}\end{aligned}$$

(On a ici fait apparaître  $u(a+h)v(a)$ )

$$\begin{aligned}&= \frac{[u(a+h) - u(a)]v(a) + u(a+h)[v(a+h) - v(a)]}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h}v(a) + u(a+h)\frac{v(a+h) - v(a)}{h}.\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} u(a+h) = u(a).$$

Ainsi,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a).$$

Donc  $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ . ■

## Exemple

Soit  $f(x) = x\sqrt{x}$ . Posons  $u(x) = x$  et  $v(x) = \sqrt{x}$ . Alors,  $u'(x) = 1$  et  $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

### Propriété

### Dérivée d'un quotient de fonctions

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  telles que  $v(x) \neq 0$  pour tout  $x$  de  $I$ . Alors,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

### Exemple

Soit  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x - 1}$ .

Posons  $u(x) = 2x^2 - 5x + 1$  et  $v(x) = x - 1$ .

Alors,  $u'(x) = 4x - 5$  et  $v'(x) = 1$  d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(4x - 5)(x - 1) - (2x^2 - 5x + 1) \times 1}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 4x - 5x + 5 - 2x^2 + 5x - 1}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 4}{(x - 1)^2}.$$

### Remarque

Dans le cas de la dérivée d'un quotient, il n'est pas nécessaire de développer le carré au dénominateur.

### Propriété

### Équation de la tangente

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a \in I$ , de courbe représentative  $\mathcal{C}$ .

Soit  $A(a; f(a))$ . La tangente  $\mathcal{T}_A$  a pour équation réduite :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

### Exemple

Reprenons la fonction  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x - 1}$  de l'exemple précédent.

Nous avons trouvé :  $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 4}{(x - 1)^2}$  donc en  $A(0; f(0))$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A : y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ \text{soit } \mathcal{T}_A : y &= 4x - 1. \end{aligned}$$

## Propriété

## Variations et dérivée

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f'(x) \geq 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ ;
- Si  $f'(x) \leq 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .

Nous n'allons pas faire de démonstration de ce résultat mais nous pouvons tout de même voir que si le nombre dérivée de  $f$  est positif en  $a$ , cela signifie que sa tangente « monte » (nombre dérivé = coefficient directeur de la tangente). Et si la tangente « monte », cela signifie que la courbe aussi (localement) et donc que la fonction est croissante (localement).

En appliquant ce raisonnement à tout réel  $a$  de  $I$ , on constate la propriété.

## Exemple

Reprenons la fonction  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x - 1}$  de l'exemple précédent.

Nous avons trouvé :  $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 4}{(x - 1)^2}$ .

Le discriminant du numérateur est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 16 - 32 = -16 < 0.$$

Donc le numérateur est positif. De plus, le dénominateur est aussi positif donc  $f'(x) > 0$  sur  $] -\infty ; 1[$  et sur  $] 1 ; +\infty [$ .

$f$  est donc croissante sur chacun de ces deux intervalles.

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f$	↗		↗

## Définition

## Extremum d'une fonction

Un **extremum** est un maximum ou un minimum d'une fonction. Il est obtenu lorsque la dérivée s'annule en changeant de signe.

## Exemple

Soit  $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ . Alors,  $f'(x) = 6x - 4$  et on a :

$x$	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	↘ ↗		

Pour  $x = \frac{2}{3}$ ,  $f'(x)$  s'annule en changeant de signe donc un extremum est atteint pour  $x = \frac{2}{3}$  (ici, il s'agit du sommet de la parabole d'équation  $y = 3x^2 - 4x + 2$ ).