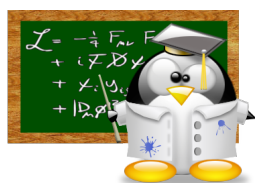


# Sommaire

Suite . . . . .	2
Indice, terme & rang . . . . .	2
Suite croissante, décroissante & constante . . . . .	3
Suites arithmétiques . . . . .	5
Formule explicite d'un terme d'une suite arithmétique . . . . .	5
Formule explicite générale d'un terme d'une suite arithmétique . . . . .	6
Variations d'une suite arithmétique . . . . .	6
Suites géométriques . . . . .	7
Formule explicite d'un terme d'une suite géométrique . . . . .	8
Formule explicite générale d'un terme d'une suite géométrique . . . . .	8
Variations d'une suite géométrique . . . . .	9
Complément 1 : Utiliser un tableur . . . . .	10
Complément 2 : Utiliser Algobox . . . . .	11
Complément 3 : Utiliser sa calculatrice . . . . .	12



## Prérequis

- Notions de fonctions

## Définition

*Suite*

Une **suite** est une fonction dont la variable est un nombre entier.

## Notations

Une suite est considérée comme une fonction dont l'ensemble de définition est  $\mathbb{N}$  et l'ensemble image  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

De façon plus courte, on pourra noter la suite :  $(u_n)$  (et pas  $u(n)$  pour les différencier des fonctions).

Si l'ensemble de définition n'est pas  $\mathbb{N}$  mais, par exemple, tous les entiers supérieurs ou égaux à 2, on notera :  $(u_n)_{n \geq 2}$ .

## Définition

*Indice, terme & rang*

Pour une suite notée  $(u_n)$ ,

- $n$  est appelé l'**indice** de la suite ;
- $u_n$  est appelé le **terme** de la suite d'indice  $n$  ;
- la position de  $u_n$  dans la suite est appelé le **rang** du terme  $u_n$ .

## Exemple

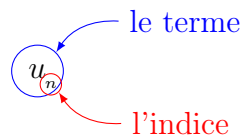
On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par ses premiers termes :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_1 = 5 \quad ; \quad u_2 = 8 \quad ; \quad u_3 = 12 \quad ; \quad u_4 = 17 \quad ; \quad u_5 = 23 .$$

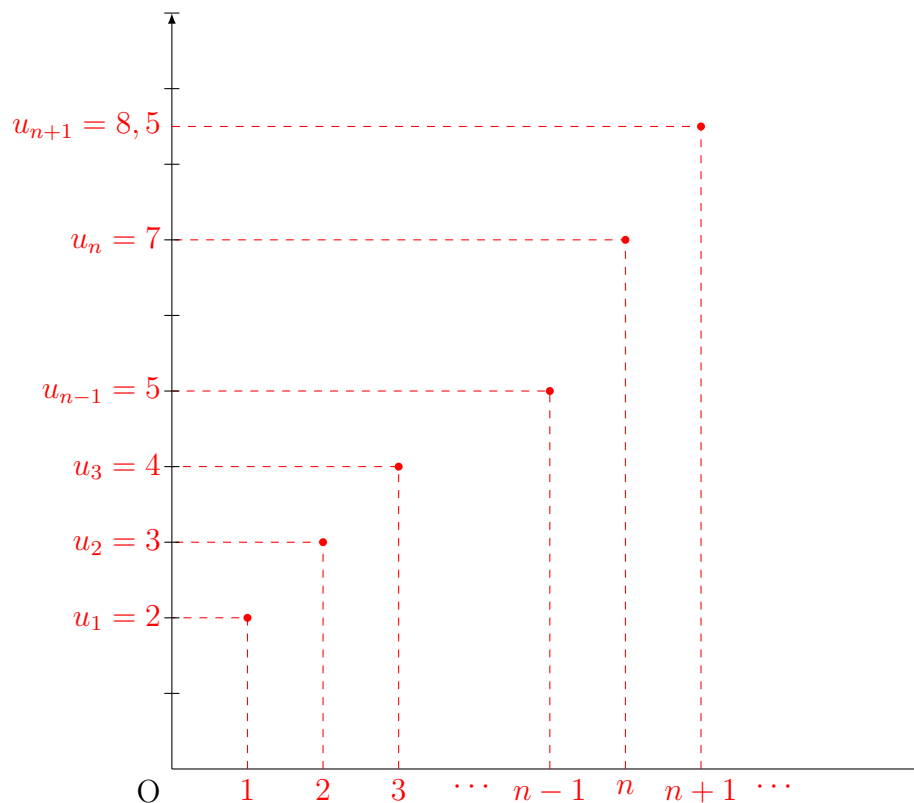
Ici,

- le premier terme de la suite est  $u_0$ , c'est-à-dire « 3 » ; son rang est donc égal à 1 car il est le 1<sup>er</sup> de la liste.
- le terme d'indice « 4 » est  $u_4$ , c'est-à-dire « 17 » ; son rang est égal à 5 car il est en 5<sup>e</sup> position dans la suite à partir du premier terme.

**Pour résumer :**



## Représentation graphique :



Les termes sont représentés en ordonnées ; les abscisses représentent les indices des termes. Une suite est donc représentée par des points qui ne sont pas reliés entre eux.

### Remarque

Pour un indice quelconque, notons que  $u_{n-1}$  est le terme qui vient juste avant  $u_n$ , et  $u_{n+1}$  est celui qui vient juste après :

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_{n-1} \quad u_n \quad u_{n+1}$$

Des flèches courbes indiquent la relation de suite entre les termes :  $u_0 \rightarrow u_1$ ,  $u_1 \rightarrow u_2$ ,  $u_2 \rightarrow u_3$ , ...,  $u_{n-1} \rightarrow u_n$ ,  $u_n \rightarrow u_{n+1}$ .

### Définition

*Suite croissante, décroissante & constante*

- Une suite  $(u_n)$  est **croissante** si, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} > u_n$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **décroissante** si, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} < u_n$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **constante** si, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n$ .

## Comment définit-on concrètement une suite ?

On peut définir une suite de façon **explicite** (ou **fonctionnelle**) ou **par récurrence**. Le tableau page suivante donne quelques exemples de définition de suite.

## Suites définies de façon explicite

- $u_n = 2n + 3$ . Dans ce cas, on a :

$$\rightarrow u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3;$$

$$\rightarrow u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5;$$

$$\rightarrow u_2 = 2 \times 2 + 3 = 7;$$

$$\vdots$$

- $u_n = 2^n + 1$ . Dans ce cas, on a :

$$\rightarrow u_0 = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2;$$

$$\rightarrow u_1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3;$$

$$\rightarrow u_2 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5;$$

$$\vdots$$

- $u_n = n^2 + 3n - 3^n$ . Dans ce cas, on a :

$$\rightarrow u_0 = 0^2 + 3 \times 0 - 3^0 = -1;$$

$$\rightarrow u_1 = 1^2 + 3 \times 1 - 3^1 = 1;$$

$$\rightarrow u_2 = 2^2 + 3 \times 2 - 3^2 = 1;$$

$$\rightarrow u_3 = 3^2 + 3 \times 3 - 3^3 = -9;$$

$$\vdots$$

## Suites définies par récurrence

$$\bullet \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3. \end{cases}$$

Cela signifie qu'un terme est égal au double de son précédent plus 3. Dans ce cas, on a :

$$\rightarrow u_1 = 2 \times u_0 + 3 = 2 \times 4 + 3 = 11;$$

$$\rightarrow u_2 = 2 \times u_1 + 3 = 2 \times 11 + 3 = 25;$$

$$\rightarrow u_3 = 2 \times u_2 + 3 = 2 \times 25 + 3 = 53;$$

$$\vdots$$

$$\bullet \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2. \end{cases}$$

Cela signifie qu'un terme est égal au carré de son précédent moins 3. Dans ce cas, on a :

$$\rightarrow u_1 = u_0^2 - 2 = 1^2 - 2 = -1;$$

$$\rightarrow u_2 = u_1^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = -1;$$

$$\rightarrow u_3 = u_2^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = -1;$$

$$\vdots$$

## Activité

Pour chacune des questions, calculer les 4 premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

$$\mathbf{1} \quad u_n = \frac{1}{2^n} - n$$

$$\mathbf{3} \quad \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \end{cases}$$

$$\mathbf{2} \quad u_n = \sqrt{n^2 + n + 1}$$

$$\mathbf{4} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (-1)^{u_n} + u_n \end{cases}$$

$$\mathbf{1} \quad u_n = \frac{1}{2^n} - n.$$

$$u_0 = \frac{1}{2^0} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{2^1} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2^2} - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{2^3} - 3 = \frac{1}{8} - 3 = -\frac{23}{8}$$

$$\mathbf{2} \quad u_0 = \sqrt{0^2 + 0 + 1} = 1$$

$$u_1 = \sqrt{1^2 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$u_2 = \sqrt{4^2 + 4 + 1} = \sqrt{21}$$

$$u_3 = \sqrt{3^2 + 3 + 1} = \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{3} \quad u_0 &= -1 \\
u_1 &= \frac{u_0 + 1}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \\
u_2 &= \frac{u_1 + 1}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} \\
u_3 &= \frac{u_2 + 1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{4} \quad u_0 &= 1 \\
u_1 &= (-1)^{u_0} + u_0 = (-1)^1 + 1 = 0 \\
u_2 &= (-1)^{u_1} + u_1 = (-1)^0 + 0 = 1 \\
u_3 &= (-1)^{u_2} + u_2 = (-1)^1 + 1 = 0
\end{aligned}$$

### Définition

*Suites arithmétiques*

Une suite  $(u_n)$  est **arithmétique** s'il existe un nombre réel  $r$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r .$$

«  $r$  » est alors appelée la **raison** de la suite.

Autrement dit, si deux termes consécutifs diffèrent du même nombre, alors la suite est arithmétique.

### Exemples

- La suite définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + 3$$

est une suite arithmétique de raison  $r = 3$ .

- La suite  $(u_n)$  dont les premiers termes sont :

$$1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; \dots$$

est arithmétique car la différence entre deux termes consécutifs est toujours égale à 2. Donc ici,  $r = 2$  et  $u_0 = 1$ .

- La suite  $(u_n)$  dont les premiers termes sont :

$$1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; \dots$$

n'est pas arithmétique car :  $3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 \neq 10 - 7$ .

Regardons maintenant ce qui se passe pour les premiers termes d'une telle suite. Considérons la suite arithmétique  $(u_n)$  de raison  $r$ . Alors :

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + r \\
u_2 &= u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r \\
u_3 &= u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r \\
u_4 &= u_3 + r = (u_0 + 3r) + r = u_0 + 4r \\
&\vdots
\end{aligned}$$

On s'aperçoit alors de la propriété page suivante :

### Propriété

#### Formule explicite d'un terme d'une suite arithmétique

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ . Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr .$$

Mais il arrive quelques fois que l'on n'ait pas le premier terme  $u_0$  de la suite. Supposons que l'on connaisse le terme  $u_k$ , où  $k \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$u_{k+1} = u_k + r$$

$$u_{k+2} = u_{k+1} + r = (u_k + r) + r = u_k + 2r$$

$$u_{k+3} = u_{k+2} + r = (u_k + 2r) + r = u_k + 3r$$

⋮

On peut donc imaginer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_{k+p} = u_k + pr .$$

En posant :  $n = k + p$ , donc  $p = n - k$ , on a alors la propriété suivante :

### Propriété

#### Formule explicite générale d'un terme d'une suite arithmétique

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_k + (n - k)r .$$

### Astuce

Un moyen mnémotechnique pour ne pas se tromper dans les indices et le coefficient est de remarquer :

$$\begin{array}{c} u_n = u_k + (n - k) \times r \\ \begin{array}{ccc} \boxed{n} & \boxed{k} & \boxed{n - k} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & + & \\ n & = & k + (n - k) \end{array} \end{array}$$

### Exemples

- Soit la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n - 2, \forall n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

La suite est donc arithmétique de premier terme  $u_0 = 7$  et de raison  $r = -2$ .

Ainsi,  $u_{100} = u_0 + 100 \times (-2) = 7 - 200 = -193$ .

- Soit la suite arithmétique  $(u_n)$  de raison  $r = 6$  et telle que  $u_9 = 13$ .

Alors,  $u_{100} = u_9 + (100 - 9) \times 6 = 13 + 91 \times 6 = 559$ .

## Propriété

### Variations d'une suite arithmétique

- Une suite arithmétique est croissante si sa raison est strictement positive.
- Une suite arithmétique est décroissante si sa raison est strictement négative.
- Une suite arithmétique est constante si sa raison est nulle.

## Démonstration

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + r) - u_n = r.$$

Ainsi,

- si  $r > 0$ , alors  $u_{n+1} - u_n > 0$  et donc  $u_{n+1} > u_n$ , ce qui signifie que  $(u_n)$  est croissante ;
- si  $r < 0$ , alors  $u_{n+1} - u_n < 0$  et donc  $u_{n+1} < u_n$ , ce qui signifie que  $(u_n)$  est décroissante ;
- si  $r = 0$ , alors  $u_{n+1} - u_n = 0$  et donc  $u_{n+1} = u_n$ , ce qui signifie que  $(u_n)$  est constante.

■

## Exemples

- La suite arithmétique de raison  $r = \frac{1}{2}$  est croissante car  $r > 0$ .
- La suite arithmétique de raison  $r = -3$  est décroissante car  $r < 0$ .

## Définition

### Suites géométriques

Une suite  $(v_n)$  est **géométrique** s'il existe un réel  $q$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = qv_n .$$

«  $q$  » est alors appelée la **raison** de la suite.

Autrement dit, dans une suite géométrique, si on divise un terme par son précédent, on doit toujours obtenir le même nombre.

## Exemples

- La suite définie par son premier terme  $u_0 = 2$  et par la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = 3v_n$$

est une suite géométrique de raison  $q = 3$ .

- La suite dont les premiers termes sont :

$$1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 ; \dots$$

est une suite géométrique de raison  $q = 2$  car pour passer d'un terme à son suivant, on doit le multiplier par 2.

Regardons maintenant ce qui se passe pour les premiers termes d'une suite géométrique  $(v_n)$  de raison  $q$  :

$$v_1 = qv_0$$

$$v_2 = qv_1 = q \times qv_0 = q^2v_0$$

$$v_3 = qv_2 = q \times q^2v_0 = q^3v_0$$

$$v_4 = qv_3 = q \times q^3v_0 = q^4v_0$$

⋮

On s'aperçoit alors de la propriété suivante :

### Propriété

#### *Formule explicite d'un terme d'une suite géométrique*

Soit  $(v_n)$  une suite géométrique de premier terme  $v_0$  et de raison  $q$ . Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = q^n v_0 .$$

Cependant, il arrive que l'on n'ait pas le premier terme d'une suite géométrique. Supposons alors que l'on connaisse  $v_k$ , où  $k$  est un entier naturel quelconque. Alors :

$$v_{k+1} = qv_k$$

$$v_{k+2} = qv_{k+1} = q \times qv_k = q^2v_k$$

$$v_{k+3} = qv_{k+2} = q \times q^2v_k = q^3v_k$$

$$v_{k+4} = qv_{k+3} = q \times q^3v_k = q^4v_k$$

⋮

On peut alors conjecturer que :

$$v_{k+p} = q^p v_k .$$

En posant  $n = k + p$ , donc  $p = n - k$ , on a la propriété suivante :

### Propriété

#### *Formule explicite générale d'un terme d'une suite géométrique*

Soit  $(v_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ . Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, v_n = q^{n-k} v_k .$$



## Astuce

Un moyen mnémotechnique pour ne pas se tromper dans les indices et l'exposant est de remarquer que dans le membre de droite, si on ajoute l'exposant avec l'indice :  $(n - k) + k$ , on obtient l'indice du membre de droite ( $n$ ).

## Exemples

- $(v_n)$  est la suite géométrique de premier terme  $v_0 = 10^{-500}$  et de raison  $q = 10$ .  
Alors,  $v_{100} = v_0 \times q^{100} = 10^{-500} \times 10^{100} = 10^{-400}$ .
- $(v_n)$  est la suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$  telle que  $v_8 = 10$ .  
Alors,  $v_{100} = v_8 \times q^{100-8} = 10 \times \frac{1}{2^{92}} = \frac{5}{2^{91}}$ .

## Propriété

### *Variations d'une suite géométrique*

Soit  $(v_n)$  une suite géométrique de raison  $q$  à termes positifs.

- Si  $0 < q < 1$ , alors  $(v_n)$  est décroissante.
- Si  $q > 1$ , alors  $(v_n)$  est croissante.
- Si  $q = 1$ ,  $(v_n)$  est constante.

## Démonstration

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$v_{n+1} - v_n = qv_n - v_n = (q - 1)v_n .$$

Ainsi,

- si  $0 < q < 1$ , alors  $(q - 1) < 0$  et comme  $v_n > 0$ ,  $(q - 1)v_n < 0$ , donc  $v_{n+1} < v_n$ .  $(v_n)$  est donc ici décroissante.
- si  $q > 1$ ,  $(q - 1) > 0$  et donc  $v_{n+1} > v_n$ .  $(v_n)$  est alors croissante.
- si  $q = 1$ ,  $v_{n+1} = v_n$  donc la suite  $(v_n)$  est constante.

■

## Complément 1: Utiliser un tableur

Nous allons voir ici comment utiliser un tableur pour calculer les termes consécutifs d'une suite définie par récurrence.

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3. \end{cases}$$

Dans la colonne **A**, nous mettrons les valeurs des indices et dans la colonne **B**, celles des termes de la suite.

On commence alors par insérer  $u_0$  :

	A	B
1	n	u(n)
2	0	7

Ensuite, on insère les formules qui nous serviront à calculer les valeurs suivantes de  $n$  et  $u_n$  :


	A	B
1	n	u(n)
2	0	7
3	=A2+1	=0.5*B2-3

On valide et on obtient :

	A	B
1	n	u(n)
2	0	7
3	2	0,5

On sélectionne maintenant les cellules **A3** et **B3** pour les copier vers le bas :

	A	B
1	n	u(n)
2	0	7
3	2	0,5
4		
5		



On peut alors remarquer que  $u_n \approx -6$  pour  $n \geq 33$ , ce qui laisse supposer que les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de cette valeur.

## Complément 2: Utiliser Algobox

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1. \end{cases}$$

Algobox est un logiciel qui est à mi-chemin entre l'algorithme et la programmation, c'est-à-dire qu'il permet de programmer de façon assez intuitive.

### Déclaration des variables

Avant tout, il faut déclarer les variables qui vont intervenir par la suite.

Nous allons ici déclarer les variables :

- n (nombre), qui va désigner l'indice ;
- u (nombre), qui va désigner  $u_n$ .

### Début de l'algorithme

Nous allons d'abord affecter la valeur « 0 » à n et « 1 » à u (c'est les valeurs initiales des variables). Ensuite, on crée une boucle (avec, par exemple, 10 itérations) dans laquelle on calcule les valeurs successives des 10 termes de la suite qui suivent  $u_0$ .

On obtient alors :

#### Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  u PREND_LA_VALEUR 1
  POUR n ALLANT_DE 1 A 10
  DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR u/3+1
    AFFICHER "u("
    AFFICHER n
    AFFICHER ")="
    AFFICHER u
  DEBUT_POUR
FIN_ALGORITHME
```

#### Résultats

```
***Algorithme lancé***

u(1)=1.3333333
u(2)=1.4444444
u(3)=1.4814815
u(4)=1.4938272
u(5)=1.4979424
u(6)=1.4993141
u(7)=1.4997714
u(8)=1.4999238
u(9)=1.4999746
u(10)=1.4999915

***Algorithme terminé***
```

## Complément 3: Utiliser sa calculatrice

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{2}{7}u_n + 4. \end{cases}$$

Pour calculer les termes de cette suite jusqu'à  $u_{10}$  :

CASIO	TI
<p>Menu : RECUR+[F3] (type)+[F2] (an+1)</p> <p>Ensuite, on entre la formule : <math>a_{n+1} = -(2/7)a_n + 4</math> On tape ensuite [EXE]</p> <p>Ensuite, on tape sur [F5] (RANG) pour paramétrer :</p> <p>Start : 0 (on commence à <math>u_0</math>) End : 10 (on va jusqu'à <math>u_{10}</math>) <math>a_0</math> : 1</p> <p>Revenez à RECUR et sélectionnez la suite, puis sélectionnez TABLE [F6] pour afficher les termes.</p>	<p>MODE : Seq</p> <p>Ensuite, on entre la formule : nMin=0 <math>u(n) = -(2/7)*u(n-1) + 4</math></p> <p>Puis, on tape sur [2nd][WINDOWS] (TBL SET) pour paramétrer :</p> <p>TblStart=0 (on commence à <math>u_0</math>) <math>\Delta Tbl=1</math> (on va de 1 en 1)</p> <p>Ensuite, [2nd][GRAPH] (TABLE) pour afficher les termes.</p>