Ainsi De Suite

Écrit par Stéphane Pasquet

Édition 14 juillet 2018

Sommaire

Avant-propos iv
1 La genèse de l'analyse numérique 1
2 Généralités sur les suites numériques 5
3 Suites arithmétiques 21
4 Suites arithmétiques de degré d 35
5 Suites géométriques 45
6 Suites arithmético-géométriques 68
7 Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ 82
8 Suites homographiques 93
9 Suites linéaires à coefficients constants 99
9.1 La suite de Fibonacci 102
9.2 La suite de tribonacci 106
9.3 Les suites de k-bonacci 107
9.4 La suite de Padovan 110
9.5 La suite de Bereha 111
9.6 La suite de Pell 112
10 Fractions continues 113
10.1 Équation de Pell-Fermat 117
11 Suites de Catalan 122
11.1 Applications 124
12 Suites de Farey et Brocot 126
13 Suites de Steinhaus et une variante 130
14 La suite de Prouhet-Thue-Morse 133
14.1 Morphismes de monoïdes libres 135
14.2 Le problème de Prouhet-Tarry-Escott 136
14.3 Un produit infini 137
14.4 Partition des entiers naturels 137
14.5 Une série formelle 138
14.6 Les β-expansions 139
15 Un air de suites 140
15.1 La méthode des rectangles 140
15.2 La méthode des trapèzes 143
15.3 La méthode de Simpson 144
16 Résolution d'équations 146
16.1 La dichotomie 146
16.2 La méthode de Newton 148
16.3 La méthode de la sécante 149
16.4 La méthode de la fausse position, ou *regula falsi* 150
16.5 La méthode de Müller 150
17 Suites diverses 152
17.1 Moyenne arithmético-géométrique 152
17.2 Suites aliquotes 154
17.3 Suite de Syracuse 155
17.4 La série de Grandi 155
17.5 La suite de Conway 156

17.6 La suite de Robinson 158
17.7 La suite de Newman-Conway 158
17.8 Les suites de Somos 159
17.9 La suite de Gödel 159
17.10 Les suites de Beatty 160
17.11 Les suites de Douglas Hofstadter 160
17.12 Les suites de Stöhr 161
17.13 Les suites d'Ulam 162
17.14 Les suites d'Euler-Bernoulli 163
17.15 Les suites de Skolem 164

18 Les fractales 165
18.1 Fractals de Sierpinski 165
18.2 Les fractals dans la nature 167
18.3 Ensemble de Mandelbrot 169
18.4 Ensemble de Julia, ensemble de Fatou 170
18.5 Dimensions fractales 172

19 Exercices divers 174

Avant-propos

Depuis que j'ai découvert la notion de suites, je n'ai cessé de travailler dessus. C'est donc tout naturellement que j'ai souhaité réunir dans cet ouvrage tout ce qui fait que cette notion est intéressante.

J'ai commencé à écrire ce livre en 2007. Depuis, il y a eu plusieurs autres éditions mais le contenu était à peu près le même, en tentant toutefois de corriger les quelques erreurs que l'on m'a signalées.
Pour cette réédition 2015, j'ai souhaité d'une part amélioré l'aspect afin de faciliter la lecture, et d'autre part ajouter du contenu. C'est ainsi, par exemple, que le chapitre concernant les méthodes d'approximations de solutions d'équations s'est vu ajouter des résultats sur les majorations d'erreurs, ou encore le chapitre sur les fractales a vu le jour.

Je ne prétendrai jamais être un expert en toutes les suites qui apparaissent ici, mon souhait étant de montrer aux lectrices et lecteurs ce qui peut exister. Libre à eux ensuite d'approfondir les sujets quand ils le désirent.

J'espère que le contenu de ce document vous passionnera autant qu'il m'a passionné.

Stéphane Pasquet

La genèse de l'analyse numérique

1

Nous sommes en 1568. Le plus grand algébriste de l'époque, François Viète, trouvait que le mot *algèbre* avait une consonance désagréable et ne pouvait être utilisé en Europe. Il lui préférait de loin le mot *analyse*, du latin et du grec *analysis* qui signifie « action de délier, de dissoudre, de résoudre un tout en sa partie ». Ce mot, selon lui, rendait mieux compte de la méthode utilisée.

Ainsi, il publie en 1591 son ouvrage *In artem analyticam isagoge*, se traduisant par *Introduction en l'art analytique*, dans lequel il précise les modalités de son algèbre nouvelle en commençant par écrire :

Citation 1 ▶ François Viète

Il se rencontre dans les Mathématiques une certaine manière et façon de rechercher la vérité, laquelle on dit avoir été premièrement inventée par Platon, que Théon a appelée Analyse.

François Viète (1540 - 1603)

Cet ouvrage fut important pour la propagation du savoir de l'auteur sous le nom d'Analyse. René Descartes avait un même point de vue que Viète sur le mot algèbre.

Citation 2 ▶ René Descartes

Cet art (...) que l'on désigne par le nom barbare d'Algèbre...

René Descartes (1596 - 1650)

D'ailleurs, Jean-Étienne Montucla qualifie d'*analyse mixte* à propos des travaux de Descartes qui faisaient intervenir l'analyse en géométrie, qui deviendra plus tard la géométrie analytique. L'Analyse se distinguera réellement de l'Algèbre quand l'infiniment petit (ou le calcul infinitésimal) apparaîtra, c'est-à-dire avec Leonhard Euler et son *Introduction à l'analyse infinitésimale* parue en 1748 et écrite entièrement en latin.

J.-E. Montucla
(1725 - 1799)

L'Analyse est constituée de plusieurs « compartiments », dont la *géométrie analytique* (créée par Descartes, c'est une géométrie rapportée à un repère permettant d'effectuer des calculs pour démontrer des résultats géométriques), l'*analyse fonctionnelle* (qui consiste en l'étude des diverses fonctions), l'*analyse complexe* (calculs basés sur les nombres dits complexes), le *calcul infinitésimal* (calcul différentiel et calcul intégral),...
Ce domaine est assez vaste mais parmi ses sous-domaines, nous avons celui de l'*analyse numérique*. C'est particulièrement de cette catégorie dont nous allons parler dans cet ouvrage, et plus particulièrement des suites numériques.
Bien que l'analyse fut introduite en France au XVIe siècle, les calculs analytiques sont bien plus anciens. Ils étaient par exemple connus des babyloniens, des grecs (avec Archimède, spécialiste des procédés d'approximation), des égyptiens (avec Héron d'Alexandrie et son procédé d'extraction de la racine carrée). Mais les notations n'étaient pas celles que nous connaissons et utilisons actuellement.
De nos jours, on définit une suite comme une fonction à variable entière de la façon suivante :

Leonhard Euler
(1707 - 1783)

$$\begin{array}{rccc} u \ : & \mathscr{D} \subseteq \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathscr{E} \subseteq \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

Dans ce cas, on ne parlera plus de fonction mais de **suite numérique**. Chaque image sera appelée un **terme** de la suite et le nombre écrit en indice du terme sera appelé le **rang du terme** (on peut aussi l'appeler l'indice du terme).

Notation 1

Une suite sera notée par exemple :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

pour désigner la suite dont le nom est « u », dont l'indice sera noté « n » et où l'indice prendra ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pourra aussi utiliser la notation :

$$(u_n)_{n\geqslant 1}$$

si l'on veut que l'indice soit un entier supérieur ou égal à 1.
S'il n'y a aucune ambiguïté, on pourra aussi utiliser la notation :

$$(u_n)\ .$$

Dans ce cas, cela suppose que l'indice est un entier naturel.

Si u est une suite prenant ses valeurs dans un ensemble $\mathscr{E}$, on pourra écrire : $u \in \mathscr{E}^{\mathbb{N}}$. Ainsi, l'ensemble :

$$\mathscr{F} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right\}$$

est l'ensemble des suites à valeurs réelles.

Il existe deux façons de définir une suite. Voyons ceci avec deux exemples concrets.

Exercice 1 ▶ Coût de production d'ours en peluche

Après analyse statistique sur son coût de production unitaire, une entreprise de fabrication d'ours en peluche a établi que ce dernier pouvait s'exprimer à l'aide de la fonction suivante :

$$\mathscr{B}(x) = x\mathrm{e}^{-0,2x}$$

où x, exprimé en centaines, représente le nombre d'ours fabriqués et où $\mathscr{B}(x)$ est exprimé en centaines d'euro.

Comment définit-on la suite représentant ce coût de production ?

Ici, c'est le cas le plus simple. Nous avons explicitement la fonction dont la variable n'est pas réelle mais entière. Ainsi, si (b_n) est la suite représentant le coût de production unitaire, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = n\mathrm{e}^{-0,2n}$$

On aura alors :

Valeurs de n	Valeurs de u_n
0	0
1	$\mathrm{e}^{-0,2} \approx 0,82$
2	$2\mathrm{e}^{-0,4} \approx 1,34$
3	$3\mathrm{e}^{-0,6} \approx 1,65$
4	$4\mathrm{e}^{-0,8} \approx 1,80$

On dit ici que l'on a défini la suite de façon explicite (à l'aide de la fonction $\mathscr{B}$) et que l'on a calculé ses 5 premiers termes.

Voyons maintenant un deuxième cas :

Exercice 2 ▶ Intérêts

Robin possède 200 € sur un compte.
Chaque année, il dépose 100 € après avoir encaissé les intérêts propres à ce compte, qui sont de 2,5 % du solde de l'année précédente.
Comment exprimer le solde de ce compte pour une année quelconque ?

Notons (u_n) la suite qui va représenter ce solde. Alors,

- $u_0 = 200$ car u_0 représente le solde initial.
- $u_1 = 200 + \frac{2,5}{100} \times 200 + 100$ car aux 200 €, il faut ajouter 2,5 % de 200 et 100 €.
  On a alors : $u_1 = 1,025 \times 200 + 100$.
- $u_2 = u_1 + \frac{2,5}{100} \times u_1 + 100$.
  On a alors : $u_1 = 1,025 \times u_1 + 100$.

On peut alors, à ce niveau, deviner la formule qui donne le terme u_n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1,025u_{n-1} + 100.$$

Cette dernière formule nous dit que pour obtenir la valeur du terme de rang n, il faut multiplier le terme précédent (de rang $n-1$) par 1,025 et ensuite ajouter 100.

On a ainsi défini la suite de façon récursive, c'est-à-dite que la formule établie est en fonction d'un ou plusieurs termes précédents.

Généralités sur les suites numériques

2

Dès lors que nous avons une suite, il est nécessaire de se pencher sur son comportement : comment vont varier ses termes ? C'est l'objet des chapitres qui vont suivre. Mais comme pour toutes les notions mathématiques, il nous faut avant tout fixer le vocabulaire.

Dans ce chapitre, je supposerai que les indices sont des entiers naturels et que les suites sont à valeurs réelles.

Définition 1 ▶ Sens de variations

Soit (u_n) une suite.

- Si, pour tout n, $u_{n+1} > u_n$, alors on dira que (u_n) est **strictement croissante**.
- Si, pour tout n, $u_{n+1} < u_n$, alors on dira que (u_n) est **strictement décroissante**.
- Si une suite est strictement croissante ou décroissante, alors on dira qu'elle est **strictement monotone**.

Afin de vérifier si une suite est croissante ou décroissante, on peut calculer $u_{n+1} - u_n$ et comparer le résultat à 0, ou bien calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et comparer le résultat à 1 si les termes ont le même signe.

Exemple 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{3^n}{4^{n-1}}.$$

Dans la mesure où u_n est défini comme un quotient, on peut calculer le rapport de deux termes consécutifs car on voit que les u_n sont strictement positifs :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n}}{\frac{3^n}{4^{n-1}}}\\ &= \frac{3^{n+1}}{4^n} \times \frac{4^{n-1}}{3^n}\\ &= \frac{3_{n+1}}{3^n} \times \frac{4^{n-1}}{4^n}\\ &= \frac{3}{4} < 1.\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, et comme u_n et u_{n+1} sont positifs tous les deux, $u_{n+1} < u_n$.
La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Définition 2 ▶ Suite super-croissante

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite.
On dit que cette suite est super-croissante si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Un exemple des plus quotidien est la suite que forment le montant des pièces et billets en euro :

En effet, posons u_n le montant de la n-ième pièce, en rangeant ces pièces dans le même ordre que sur la figure. Alors :

- $u_0 = 0{,}01$
- $u_1 = 0{,}02$
- $u_2 = 0{,}05$
- $u_3 = 0{,}10$
- $u_4 = 0{,}20$
- $u_5 = 0{,}50$
- $u_6 = 1$
- $u_7 = 2$
- $u_8 = 5$
- $u_9 = 10$
- $u_{10} = 20$
- $u_{11} = 50$
- $u_{12} = 100$
- $u_{13} = 200$
- $u_{14} = 500$

On peut alors vérifier que pour tout entier naturel non nul n inférieur ou égal à 14, $u_n > u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$:

- $u_1 = 0{,}02 > u_0$
- $u_2 = 0{,}05 > 0{,}03\ (= 0{,}01 + 0{,}02)$
- $u_3 = 0{,}10 > 0{,}08\ (= 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}05)$
- $u_4 = 0{,}20 > 0{,}18\ (= 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}10)$
- etc.

Exercice 3 ▶ Le problème du sac à dos

On dispose d'un certain nombre de cailloux dont les poids respectifs sont notés $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de sorte qu'ils forment une suite super-croissante. On met certains de ces cailloux dans un sac à dos et on pèse ce dernier.
Est-il possible de savoir quels cailloux nous avons mis dans le sac à dos ?

Notons σ le poids du sac.
Alors, comme la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est super-croissante, le terme a_k de plus grande valeur telle que $a_k \leqslant \sigma$ est dans la somme que l'on cherche (en effet, si le plus grand nombre de la somme est inférieur à ce terme, alors la somme sera nécessairement inférieure à a_k).

Prenons l'exemple de la suite super-croissante :

$$S = \{1; 2; 5; 10; 50; 100; 200; 500; 1\,000; 2\,000; 5\,000; 10\,000; 20\,000; 50\,000\}$$

obtenue en multipliant par 100 la suite des montants des pièces et billets et supposons que le poids total du sac avec les cailloux est égal à $\sigma = 562$.

- « 500 » est le plus grand des termes de la suite inférieur à σ ; donc $\sigma = 500 + \sigma_1$, avec $\sigma_1 = 62$.
- « 50 » est le plus grand des termes de S inférieur à σ_1.
  On peut alors écrire : $\sigma = 500 + 50 + \sigma_2$, où $\sigma_2 = 12$.
- « 10 » est le plus grand des termes de S inférieur à σ_2.
  On peut alors écrire : $\sigma = 500 + 50 + 10 + 2$.

On a alors la décomposition en somme souhaitée.

Voici un algorithme nous permettant d'effectuer une telle décomposition :

Algorithme 1: Décomposition en somme de termes d'une suite super-croissante

Entrées
  $n \in \mathbb{N}$ `(nombre de termes de la suite super-croissante)`
  S `un tableau (les termes de la suite super-croissante)`
  $s \in \mathbb{R}$ `(la somme à atteindre)`
  T `un tableau (les termes composant la somme à atteindre)`
  $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ `(variables muettes de boucles)`

Traitement
  $i \leftarrow n$
  $j \leftarrow 0$
  Tant que $s \neq 0$
    Tant que $S[i] > s$
      $i \leftarrow i - 1$
    Fin du Tant que $T[j] \leftarrow S[i]$
    $s \leftarrow s - T[j]$
    $j \leftarrow j + 1$
  Fin du Tant que

Entrées
  `Afficher` T

En fait, ce problème est assez connu à travers le monde et a fortement inspiré Ralph Merkle et Martin Hellman qui, en 1978, proposèrent un cryptosystème [1] connu sous le nom de *chiffrement de Merkle-Hellman*.

1. Un cryptosystème est un terme utilisé en cryptographie pour désigner un ensemble composé d'algorithmes cryptographiques et de tous les textes en clairs, textes chiffrés et clés possibles (définition de Bruce Schneier).

L'idée consiste à modifier le problème du sac à dos précédent. Le chiffrement de Merkle-Hellman est alors composé de trois algorithmes :

- **Algorithme 1.** *Génération de la clé*

  1. On fixe une suite super-croissante $S = \{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$ et un nombre N où $N > s_1 + s_2 + \cdots + s_n$.
  2. On fixe un nombre A premier avec N.
  3. On construit la suite $R = \{r_i\}$ telle que $r_i \equiv A \times s_i \mod N$

  La clé publique est alors la suite R et la clé privée est $(N,A;S)$.

- **Algorithme 2.** *Cryptage*

  On suppose que l'on a à chiffrer le message binaire composé d'une succession de « 0 » et « 1 » : $d_1d_2\cdots d_n$, $d_i \in \{0;1\}$.
  Le message crypté sera alors :
  $$M_c = \sum_{i=1}^{n} d_i r_i$$
  où $R = \{r_i\}$ est la clé publique.

  Décrypter le message M_d avec uniquement la clé publique revient à tenter de résoudre un problème de sac à dos puisqu'il faut trouver le sous-ensemble R' de R tel que $\sum_{j\in R'} r_j = M_c$.

- **Algorithme 3.** *Décryptage*

  On dispose du message crypté M_c. Posons $M_d \equiv A^{-1} \times M_c \mod N$.
  Alors :
  $$\begin{aligned} M_d &\equiv A^{-1}M_c \mod N \\ &\equiv A^{-1}\sum_{i=1}^{n} d_i r_i \mod N \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} d_i \left(A^{-1} r_i\right) \mod N \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} d_i s_i \mod N \end{aligned}$$

  Ainsi, en possession de la clé publique et de la clé privée, on peut trouver le message initial M_d car cela revient à résoudre un problème de sac à dos sur une suite super-croissante (S).

De nos jours, nous n'utilisons plus ce chiffrement car jugé peu sûr.

Définition 3 ▶ Suite ultimement périodique

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique (ou quasi périodique) s'il existe un entier naturel ω non nul et un entier naturel p_0 tels que $u_{n+\omega} = u_n$ pour tout $n \geqslant p_0$.
Dans ce cas, ω est appelé une période de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\omega_0 = \min\{\omega \in \mathbb{N}^* | \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+\omega} = u_n\}$ est appelé <u>la</u> période de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2 ► La suite de Fibonacci

Considérons la suite de Fibonacci définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

Considérons maintenant la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_n = 0 & \text{si } F_n \text{ est pair} \\ u_n = 1 & \text{si } F_n \text{ est impair} \end{cases}$$

On peut alors démontrer que $F_{2+3k} \in 2\mathbb{Z}$, $F_{3k} \notin 2\mathbb{Z}$ et $F_{1+3k} \notin 2\mathbb{Z}$ pour tout entier naturel k, donc que (u_n) est ultimement périodique de période 3.

Exercice 4 ► Somme du carré des chiffres du terme précédent

La suite $(u_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{N}^* \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p_n} a_k^{(n)} \times 10^k,\ p_0 \in \mathbb{N}^* \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p_n} \left(a_k^{(n)}\right)^2 \end{cases}$$

est-elle ultimement périodique ?

Voyons un exemple :

- $u_0 = 12345$
- $u_1 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$
- $u_2 = 5^2 + 5^2 = 50$
- $u_3 = 5^2 + 0^0 = 25$
- $u_4 = 2^2 + 5^2 = 29$
- $u_5 = 2^2 + 9^2 = 85$
- $u_6 = 8^2 + 5^5 = 89$
- $u_7 = 8^2 + 9^2 = 145$
- $u_8 = 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$
- $u_9 = 4^2 + 2^2 = 20$
- $u_{10} = 2^2 + 0^2 = 4$
- $u_{11} = 4^2 = 16$
- $u_{12} = 1^2 + 6^2 = 37$
- $u_{13} = 3^2 + 7^2 = 58$
- $u_{14} = 5^2 + 8^2 = 89 = u_6$

On a alors $u_{n+8} = u_n$ pour $n \geqslant 6$.
Voyons un second exemple :

- $v_0 = 99$
- $v_1 = 9^2 + 9^2 = 162$
- $v_2 = 1^2 + 6^2 + 2^2 = 41$
- $v_3 = 4^4 + 1^2 = 17$
- $v_4 = 1^2 + 7^2 = 50$
- $v_5 = 5^2 + 0^2 = 25$
- $v_6 = 2^2 + 5^2 = 29 = v_4$

On arrive sur un terme de la suite précédente, donc $v_{n+8} = v_n$ pour $n \geqslant 10$.

Si u_0 comporte entre 2 et 12 chiffres, alors u_1 comporte au maximum 3 chiffres (car $12 \times 9^2 = 972$).
Si u_0 comporte entre 13 et 123 chiffres, alors u_1 comporte au maximum 4 chiffres (car $123 \times 9^2 = 9\,963$).
Si u_0 comporte entre 124 et 1 234 chiffres, alors u_1 comporte au maximum 5 chiffres (car $1\,234 \times 9^2 = 99\,954$).
Dans un cas général, on sait que le nombre de chiffres d'un nombre L est $E(\log L) + 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
On sait que $\log L \leqslant L$ donc il existe un rang n à partir duquel le nombre de chiffres de u_n est compris entre 1 et 3. Ainsi, $u_{n+1\,000}$ est nécessairement égal à un u_m, où $m \leqslant n$, ce qui montre que la suite est ultimement périodique.

Définition 4 ▶ Suite majorée, suite minorée, suite bornée

- Une **suite majorée** est une suite (u_n) telle qu'il existe un nombre entier M tel que tous les termes de la suite soient inférieurs ou égaux à M :

$$(u_n) \text{ majorée } \iff \exists\, M \in \mathbb{R} | \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant M.$$

- Une **suite minorée** est une suite (u_n) telle qu'il existe un nombre entier m tel que tous les termes de la suite soient supérieurs ou égaux à m :

$$(u_n) \text{ minorée } \iff \exists\, m \in \mathbb{R} | \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n \geqslant m.$$

- Une **suite bornée** est une suite à la fois majorée et minorée.

Exemple 3

La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$

est majorée par « 1 » et minorée par « 0 » car pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 1.$$

Ainsi, elle est bornée.

Définition 5 ▶ Suite extraite

Une suite (v_n) est une **suite extraite** d'une suite (u_n) s'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemple 4 ▶ Suite des carrés parfaits

La suite des carrés parfaits est une suite extraite de la suite des entiers naturels.
En effet, si on pose $u_n = n$ et $v_n = n^2$, alors $v_n = u_{\varphi(n)}$, avec $\varphi(n) = n^2$.

Définition 6 ▶ Suite convergente

On dit qu'une suite (u_n) est **convergente** vers un nombre fini ℓ si ses termes se rapprochent de plus en plus de cette valeur. Cela s'écrit :

$$(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ converge } \iff \exists\, \ell \in \mathbb{R},\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall\, \varepsilon > 0,\, \forall n > n_0,\, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Dans cette dernière définition, $\mathbb{K}$ peut désigner l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, mais aussi l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Dans le cas des suites définies par une fonction, la limite de la suite est la limite de la fonction, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 5

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

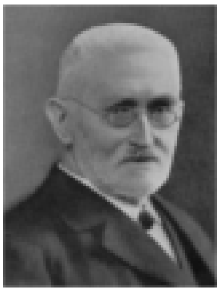
$$u_n = \frac{1}{n^2+1}.$$

Alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n^2+1) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} = 0$.

Dans le cas des suites définies par récurrence, c'est un peu plus compliqué car il faut étudier plus en profondeur la suite.
Ce sera l'objet des chapitres suivants. Pour le moment, continuons dans les généralités avec le théorème suivant :

Théorème 1 ▶ Théorème de Dedekind

Toute suite à valeurs réelles croissante et majorée converge.
Toute suite à valeurs réelles décroissante et minorée converge.



Richard DEDEKIND (1831 - 1916)

Montrons ce résultat :
Considérons la suite croissante $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et supposons qu'elle est majorée.
Notons alors M un nombre réel tel que $u_n \leqslant M$ pour tout entier naturel n. Alors, l'ensemble $\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc il admet une borne supérieure (théorème de la borne supérieure) ; notons cette borne L.
L est alors le plus petit des majorants de la suite (u_n), donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0,\, L - \varepsilon < u_{n_0} < u_n \leqslant L.$$

Cela signifie que (u_n) converge vers L.

Un raisonnement analogue pourrait être fait en supposant que la suite est décroissante et minorée. ■

Proposition 1 ▶ Unicité de la limite

Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Pour le prouver, supposons qu'il existe deux limites $\ell \neq \ell'$ à une suite (u_n).
Alors, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0,\, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \forall\, \varepsilon' > 0,\, \exists\, n_0' \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0',\, |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon' \end{cases}$$

Posons alors $N = \max\{n_0; n_o'\}$. On a :

$$\begin{aligned} |\ell - \ell'| &= |\ell - u_N + u_N - \ell'| \\ &\leqslant |\ell - u_N| + |u_N - \ell'| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon'. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que l'écart entre ℓ et ℓ' peut être rendu aussi petit que l'on veut, ce qui signifie au final que $\ell = \ell'$. ■

Proposition 2

Toute suite convergente à valeurs réelles est bornée.

Ce dernier résultat est assez évident. En effet :

- Si la suite est croissante, alors son minorant est son premier terme et son majorant est un nombre N supérieur à la limite de la suite ;
- Si la suite est décroissante, alors son majorant est son premier terme et son minorant est un nombre N inférieur à la limite de la suite ;
- Si elle n'est ni croissante ni décroissante, comme elle converge, on a :

  $$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, N \in \mathbb{N} |\, \forall\, n > N,\, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

  où ℓ représente la limite de la suite.
  Donc, la suite est bornée à partir du rang N.
  De plus, pour les rangs compris entre 0 et N, les u_n forment une partie finie de $\mathbb{R}$, donc forment une partie bornée.
  Finalement, on voit que les u_n sont bornés quel que soit leur rang. ■

Proposition 3

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente vers une limite commune.

En effet, considérons une suite (u_n) convergente de limite ℓ et une suite extraite $(u_n)_{\varphi(n)}$.
Alors, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, N \in \mathbb{N} |\, \forall\, n > N,\, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Or, φ est croissante donc $n > N \Rightarrow \varphi(n) > n > N$. Ainsi :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, N \in \mathbb{N} |\, \forall\, n > N,\, |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon.$$

Ce qui signifie que la suite extraite converge vers ℓ. ■

Abordons maintenant le thème des opérations sur les suites. Comme les suites sont des « fonctions » à variables entières, on aura les mêmes propriétés :

Définition 7 ▶ Opérations

Considérons (u_n) et (v_n) deux suites. Alors,

- la suite somme est définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ s_n = u_n + v_n$;
- la suite différence est définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ d_n = u_n - v_n$;
- la suite produit est définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ p_n = u_n \cdot v_n$;
- la suite quotient est définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ q_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ (si v_n ne s'annule pas)

On a alors les propriétés suivantes :

Proposition 4 ▶ Opérations

Considérons (u_n) et (v_n) deux suites de limites respectives ℓ et ℓ'. Alors,

- la suite somme converge vers $\ell + \ell'$;
- la suite différence converge vers $\ell - \ell'$;
- la suite produit converge vers $\ell\ell'$;
- la suite quotient converge vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$.
  Sinon, la suite quotient diverge.

Définition 8 ▶ Valeur d'adhérence

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers a.

A.-L. CAUCHY
(1789 - 1857)

L'un des précurseurs en analyse numérique fut le mathématicien Augustin-Louis Cauchy. Une catégorie de suites porte d'ailleurs son nom.

Définition 9 ▶ Suites de Cauchy

Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, est une suite de Cauchy si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon > 0 \mid \forall\, p \geqslant N_\varepsilon,\ \forall\, q \geqslant N_\varepsilon,\ |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

On peut généraliser cette définition dans tout espace métrique (E,d), et non seulement à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce cas, on remplacera « $|u_p - u_q|$ » par « $d\,(u_p,u_q)$ ».

Théorème 2 ▶ Convergence des suites de Cauchy

Toute suite réelle de Cauchy converge.

- Considérons une suite convergente (u_n) de limite ℓ. Alors,

$$\begin{aligned}\forall\, \varepsilon > 0,\, \forall\, (p,q) \in \mathbb{N}^2,\, |u_p - u_q| &= |u_p - \ell + \ell - u_q| \\ &< |u_p - \ell| + |\ell - u_q| \\ &< 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite de Cauchy.

- Considérons maintenant une suite de Cauchy (u_n), et fixons un $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\exists\, N > 0 \mid \forall\, p \geqslant N,\, \forall\, q \geqslant N,\, |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

En particulier, si $p > N$, on a :

$$|u_p - u_N| < \varepsilon.$$

Donc (u_n) est bornée.

De plus, toute suite de Cauchy est bornée donc il existe un nombre positif M tel que $u_n \in [-M; M]$ (intervalle compact prouvant que la suite (u_n) admet une valeur d'adhérence. Notons a cette valeur d'adhérence. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi. Alors, par définition de la suite :

$$\exists\, N > 0 \mid \forall\, p \geqslant 0,\, \forall\, p \geqslant 0,\, |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

On peut alors choisir P de sorte que $\varphi(P) > N$:

$$\begin{aligned}|u_n - a| &< |u_n - u_{\varphi(P)}| + |a - u_{\varphi(P)}| \\ &< 2\varepsilon.\end{aligned}$$

On en déduit alors que (u_n) converge vers a. ■

Définition 10 ▶ Suites adjacentes

Deux **suites adjacentes** sont deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} \geqslant u_n \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, v_{n+1} \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

Proposition 5

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

Supposons qu'il existe un rang p tel que $u_p > v_p$.
Notons alors $w_n = u_n - v_n$ pour tout entier naturel.
Alors, $w_p > 0$. De plus, la suite (w_n) converge vers 0 (puisque (u_n) et (v_n) sont adjacentes) et on peut écrire :

$$w_{n+1} - w_n = (u_{n+1} - u_n) + (v_n - v_{n+1}) \geqslant 0.$$

Donc la suite (w_n) est croissante.

On a donc trois points qui doivent être vérifiés en même temps :

1 la suite (w_n) est croissante ;

2 la suite (w_n) converge vers 0 ;

3 il existe un rang p tel que $w_p > 0$.

Ces trois conditions ne peuvent pas être remplies en même temps. En effet, si les conditions 1 et 3 sont remplies, le point 2 est impossible.
Cela montre que notre hypothèse de départ, à savoir qu'il existe un rang p tel que $u_p > v_p$, est faux et donc que la proposition est vraie. ■

Théorème 3 ▶ Convergence des suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Avec les notations convenues précédemment, on peut dire que la suite (u_n) est majorée par le premier terme de la suite (v_n), et (v_n) est minorée par le premier terme de la suite (u_n). Les deux suites convergent donc. Notons ℓ_u et ℓ_v les limites respectives des suites (u_n) et (v_n). Comme les deux suites sont convergentes, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) &= \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n\\ &= \ell_u - \ell_v\ .\end{aligned}$$

Or, les suites sont adjacentes donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, d'où $\ell_u = \ell_v$. ■

Exercice 5 ▶ Sens de variation

Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\leqslant 0}$ pour :

1 $u_n = 2^n - n$

2 $u_n = \dfrac{n}{3^n}$

3 $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$

4 $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right)^2$, $u_0 = -4$

5 $u_{n+1} = u_n\,(1 - u_n)$, $u_0 = \dfrac{1}{2}$

6 $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $u_0 = 3$

1 Calculons $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n\\ &= 2^n - 1 \geqslant 0\end{aligned}$$

Donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$. **La suite est donc croissante.**

2 On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n}\\ &= \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{3n}{3^{n+1}}\\ &= \frac{1-2n}{3^{n+1}} < 0 \quad \text{pour } n \geqslant 1\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} < u_n$; **la suite est donc strictement décroissante.**

3 On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+1}{n+4} - \frac{2n-1}{n+3} \\ &= \frac{(2n+1)(n+3) - (2n-1)(n+4)}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{7}{(n+3)(n+4)} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, **la suite est strictement croissante.**

4 On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{4}u_n^2 + u_n + 1 - u_n \\ &= \frac{1}{4}u_n^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, **la suite est strictement croissante.**

5 On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n\left(1 - u_n\right) - u_n \\ &= -u_n^2 < 0 \end{aligned}$$

Ainsi, **la suite est strictement décroissante.**

6 On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{1+u_n} - u_n \\ &= \frac{-u_n^2}{1+u_n} < 0 \end{aligned}$$

Ainsi, **la suite est strictement décroissante.**

Exercice 6 ▶ Calcul d'une racine carrée, suites adjacentes

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $u_0 = 3$ et par les relations :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{7}{u_n}.$$

1 Justifier par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2 (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$.

(b) En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

(c) Conclure que pour tout entier naturel n, $u_n - v_n \geqslant 0$.

3 Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

4 (a) Montrer que, quel que soit l'entier naturel non nul n, $u_n \geqslant \frac{21}{8}$.

(b) En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.

(c) En déduire, par récurrence, que $u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{10^{2^n-1}}$.

(d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$.

5 Conclure que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.
Déterminer alors leur limite.

6 Justifier que u_3 est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.

7 Proposer une méthode générale pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$, où $a \in \mathbb{R}^+$.

1 $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. Donc l'initialisation est faite.
Supposons maintenant que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour un n particulier.

Alors, $\dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$, ce qui signifie que $u_{n+1} > 0$ et donc, $\dfrac{7}{u_{n+1}} > 0$, ce qui signifie que $v_{n+1} > 0$.
L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2 (a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{7}{u_n} &\Leftrightarrow u_n v_n = 7 \\ &\Leftrightarrow 4u_n v_n = 28 \end{aligned}$$

Or,

$$(u_n + v_n)^2 - (u_n - v_n)^2 = 4u_n v_n.$$

Donc,

$$(u_n + v_n)^2 - (u_n - v_n)^2 = 28\ ,$$

d'où :

$$(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2\ .$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{7}{\frac{u_n+v_n}{2}} \\ &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{14}{u_n + v_n} \\ &= \frac{(u_n + v_n)^2 - 28}{2(u_n + v_n)} \\ &= \frac{1}{2(u_n + v_n)}(u_n - v_n)^2 \\ &= \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2\ . \end{aligned}$$

(c) On sait que $u_n > 0$; donc, d'après l'expression précédente, $u_n - v_n \geqslant 0$ (car un carré est toujours positif ou nul).

3 On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &= \frac{v_n - u_n}{2} \\ &\leqslant 0 \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{7}{u_{n+1}}}{\frac{7}{u_n}} \\ &= \frac{u_n}{u_{n+1}} \\ &> 1 \text{ car } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

4 (a) On sait que $u_n > v_n$ et que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante (ce qui signifie que $v_n > v_1$). Ainsi, $u_n > v_1$. Or, $v_1 = \frac{21}{8}$. Donc $u_n > \frac{21}{8}$.

(b) On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{1}{4u_{n+1}} (u_n - v_n)^2 \\ &\leqslant \frac{2}{21} (u_n - v_n)^2 \text{ d'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{10} (u_n - v_n)^2 \text{ car } \frac{2}{21} < \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

(c) Pour $n = 0$, $u_0 - v_0 = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3} \leqslant 1$.
L'initialisation est alors faite.
Supposons maintenant que la relations soit vraie à un certain rang n. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &\leqslant \frac{1}{10} (u_n - v_n)^2 \\ &\leqslant \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{10^{2^n-1}}\right)^2 \\ &\leqslant \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^{2^{n+1}-2}} \\ &\leqslant \frac{1}{10} \times \frac{10^2}{10^{2^{n+1}}} \\ &\leqslant \frac{10}{10^{2^{n+1}}} \\ &\leqslant \frac{1}{10^{2^{n+1}-1}}. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée ; la formule est donc vraie pour tout entier naturel n.

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{10^{2^n-1}}=0$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

5 On vient de voir que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ était décroissante et que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ était croissante, avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$. Ainsi, les suites sont adjacentes.
De la relation $v_n=\frac{7}{u_n}$, on obtient par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}u_nv_n=7.$$

Or, les deux suites ont la même limite car ce sont des suites adjacentes. Notons ℓ cette limite. On a alors :

$$\ell^2=7.$$

Ainsi,

$$\ell=\sqrt{7}$$

car les suites sont positives.

6 $v_n\leqslant\ell\leqslant u_n$. Or, $u_n-v_n\leqslant\dfrac{1}{10^{2^n-1}}$.
Donc $u_3-v_3\leqslant 10^{-7}$ et donc $|\ell-u_3|\leqslant 10^{-7}$.
Ainsi, u_3 est une approximation de $\ell=\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.

7 Il suffit de remplacer « 7 » par « a » dans l'expression de v_n pour avoir une limite égale à $\sqrt{a}$.

Exercice 7 ▶ Suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites définies par :

$$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\qquad\text{et}\qquad v_n=u_n+\frac{1}{n!}.$$

1 Montrer qu'elles sont adjacentes.
En déduire qu'elles convergent vers un nombre ℓ.

2 Montrer par l'absurde que ℓ est irrationnel.

1 D'une part, on a : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
D'autre part, on a : $v_{n+1}-v_n=\frac{1-n}{(n+1)!}<0$ donc $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante (à partir de $n=1$).
De plus, $v_n-u_n=\frac{1}{n!}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.
Les suites sont donc bien adjacentes.

Les suites sont adjacentes donc convergent vers une limite commune.

2 Supposons que $\ell\in\mathbb{Q}$. Alors, il existe deux nombres entiers p et q tels que $\ell=\dfrac{p}{q}$.
On sait que pour tout entier naturel n, $u_n<\ell<v_n$.
De plus, en réduisant au même dénominateur dans l'expression de u_n, on obtient

une fraction de la forme $u_n = \dfrac{a_n}{n!}$. Ainsi,

$$\frac{a_n}{n!} < \frac{p}{q} < \frac{a_n + 1}{n!}$$

Soit k l'entier tel que $q \times k = n!$. Alors :

$$\frac{a_n}{n!} < \frac{kp}{n!} < \frac{a_n + 1}{n!} \ ,$$

d'où :

$$a_n < kp < a_n + 1.$$

Ce qui est impossible car $kp \in \mathbb{N}$ et donc, ne peux pas être compris entre deux entiers consécutifs a_n et $a_n + 1$.
L'hypothèse de départ est donc fausse. Ainsi, $\ell \notin \mathbb{Q}$.

Suites arithmétiques

3

Après avoir vu quelques généralités sur les suites, nous pouvons maintenant nous pencher sur la première catégorie de suites. On les étudie en général en classe de Première car elles ont leur importance, nous le verrons plus tard à travers les exemples et exercices.

Mais avant de voir ce que sont les suites arithmétiques, je vais avant tout parler du principe de récurrence, ou *raisonnement par récurrence*.

Proposition 6 ► Principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.

- Si $\begin{cases} \mathcal{P}_0 \text{ vraie} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, \mathcal{P}_n \text{ vraie} \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1} \text{ vraie} \end{cases}$, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n. C'est la récurrence simple (ou aussi récurrence faible).
- Si $\begin{cases} \mathcal{P}_0 \text{ vraie} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, \mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1} \text{ vraies} \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2} \text{ vraie} \end{cases}$, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n. C'est la récurrence d'ordre 2.
- Si $\begin{cases} \mathcal{P}_0 \text{ vraie} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, \mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n \text{ vraies} \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1} \text{ vraie} \end{cases}$, alors $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n. C'est la récurrence forte.

Ce principe est utile pour démontrer des résultats, notamment en ce qui concerne les suites. C'est la raison pour laquelle je l'énonce à ce niveau.

Dans ce qui suit, je pose $\mathbb{K}$ un ensemble comme celui des nombres réels $\mathbb{R}$, des nombres complexes $\mathbb{C}$ ou même $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices à coefficients réels ou complexes. Ce qui compte, c'est que $\mathbb{K}$ représente un ensemble où des suites peuvent être définies.

Définition 11 ► Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe un nombre $r \in \mathbb{K}$ qui vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre r est alors appelé la raison de la suite.

De cette définition, on peut faire une première remarque qui justifie l'appellation de « suite arithmétique » :
Supposons que (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
Alors, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n-1} + u_{n+1} = u_n - r + u_n + r = 2u_n.$$

D'où :

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

Ainsi, un terme d'une suite arithmétique est la *moyenne arithmétique* des termes qui l'entourent, d'où l'appellation de ces suites.

À titre d'information, il existe quatre types de moyennes :

$\overline{x} = \dfrac{a+b}{2}$	moyenne arithmétique des nombres a et b
$g = \sqrt{ab}$	moyenne géométrique des nombres a et b
$h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$	moyenne harmonique des nombres a et b
$q = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)}$	moyenne quadratique des nombres a et b

Nous avons vu comment définir de façon récursive une suite arithmétique connaissant sa raison. Mais lorsque nous devons connaître la valeur du 1 000$^{\text{e}}$ terme (par exemple), cette définition n'est pas pratique. Il nous faut donc trouver un moyen pour arriver à calculer n'importe quel terme en fonction de son rang.

Nous allons donc partir du constat suivant :

- $u_1 = u_0 + r$
- $u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$
- $u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$
- $u_4 = u_3 + r = u_0 + 3 = u_0 + 4r$
- $\cdots$

On peut donc *conjecturer* (c'est-à-dire supposer vrai) le résultat suivant :

Proposition 7 ► Expression du terme d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr.$$

Nous allons pouvoir démontrer ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple.

Posons alors :

$$\mathcal{P}_n \ :\ u_n = u_0 + nr.$$

- **Initialisation.** Pour le premier rang possible ($n = 0$), la propriété est vraie. En effet :

$$\mathcal{P}_0 \ :\ u_0 = u_0 + 0 \times r.$$

On dit alors que l'*initialisation est réalisée.*

- **Hérédité.** On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n (c'est l'*hypothèse de récurrence*, notée HR).

  Nous allons montrer que $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \text{ par définition de la suite arithmétique} \\ &= u_0 + nr + r \text{ par HR} \\ &= u_0 + (n+1)r. \end{aligned}$$

  On a donc montré que $\mathcal{P}_{n+1}$ était vraie grâce au fait que $\mathcal{P}_n$ l'était.
  On dit alors que l'*hérédité est vérifiée*.

- **Conclusion.** Ainsi, d'après le principe de récurrence (faible ici), on peut affirmer que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$. ■

Dans le cas où nous ne connaissons pas la valeur de u_0 mais celle de u_p, $p \neq 0$, on a un résultat semblable :

Proposition 8 ► Expression générale du terme d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)r.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + pr + nr - pr \\ &= (u_0 + pr) + (n-p)r \\ &= u_p + (n-p)r. \end{aligned}$$

■

K. F. GAUSS
(1777 - 1855)

Une suite arithmétique peut aussi être appelée une progression arithmétique. Et à propos de progression arithmétique, l'histoire raconte que Karl Friedrich Gauss, encore jeune enfant (il n'avait pas dépassé l'âge de 10 ans), fut capable de calculer la somme des 100 premiers nombres naturels. En effet, un jour, son instituteur proposa à ses élèves de calculer cette somme afin d'avoir le silence. Mais ceci était sans compter sur les facilités du petit Gauss qui, quelques secondes plus tard, leva son ardoise sur laquelle était inscrit le résultat. Il avait simplement exécuté le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned} & 1+2+3+4+5+\cdots+97+98+99+100 \\ =\ & (1+100)+(2+99)+(3+98)+(4+97)+\cdots+(50+50) \\ =\ & 101+101+101+101+\cdots+101 \\ =\ & 50 \times 101 \\ =\ & 50\,500 \end{aligned}$$

C'est d'ailleurs tout naturellement que nous allons nous inspirer de cette méthode pour établir le résultat suivant :

Proposition 9 ▶ Somme des n premiers entiers consécutifs

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Notons :

$$s_n = 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n.$$

Alors, on peut aussi écrire :

$$s_n = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1.$$

Ainsi, en faisant une addition terme à terme, on obtient :

$$2s_n = [n+1]+[(n-1)+2]+[(n-2)+3]+\cdots+[3+(n-2)]+[2+(n-1]+[1+n]\ ,$$

c'est-à-dire :

$$2s_n = (n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1).$$

Il y a n termes dans la somme s_n donc :

$$2s_n = n(n+1)$$

et donc :

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

■

À l'aide de se dernier résultat, nous pouvons en émettre un autre :

Proposition 10 ▶ Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n = (n+1)\left(u_0+\frac{n}{2}r\right).$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n &= u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+\cdots+(u_0+nr)\\
&= (n+1)u_0+(1+2+3+\cdots+n)r\\
&= (n+1)u_0+\frac{n(n+1)}{2}r\\
&= (n+1)\left(u_0+\frac{n}{2}r\right).
\end{aligned}$$

■

Voici une autre façon d'exprimer la somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

Proposition 11 ▶ Somme des premiers termes d'une suite arithmétique (autre formulation)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2}(n+1).$$

En effet, d'après la formule précédente, on a :

$$\begin{aligned} 2(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n) &= (n+1)(2u_0 + nr) \\ &= (n+1)(u_0 + u_0 + nr) \\ &= (n+1)(u_0 + u_n) \end{aligned}$$

D'où le résultat souhaité en divisant les deux membres de l'égalité par « 2 ». ■

Nous avons vu ici tous les résultats importants concernant les suites arithmétiques. Voyons maintenant quelques exercices d'application.

Exercice 8 ▶ La cloche d'église

Si une cloche d'église sonne toutes les heures autant de fois qu'il y a d'heures, plus encore une fois par demi-heure, **combien de sons de cloche peut-on entendre en 24 heures ?**

Notons u_n le nombre de coups de cloche sonnés au cours de l'heure n, avec $1 \leqslant n \leqslant 24$. Alors, on a :

$u_1 = 1$ (la cloche sonne une seule fois à la première demi-heure) ;
$u_2 = 2$ (la cloche sonne quand il est 1h, puis à 1h30) ;
$u_3 = 3$ (la cloche sonne deux fois quand il est 2h, puis une fois à 2h30) ; $\vdots$

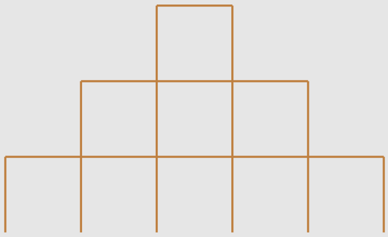
On s'aperçoit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison $r = 1$.
Ainsi, la somme du nombre de coups sonnés est :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 24 = \frac{25 \times 24}{2} = 276.$$

La cloche sonnera donc en tout 276 fois par jour.

Exercice 9 ▶ La pyramide d'allumettes

On dispose des allumettes comme sur le schéma ci-dessus (sur lequel il y a 3 étages). **Combien d'allumettes faudra-t-il pour construire 20 étages ?**



Notons a_n le nombre d'allumettes à l'étage n. On a alors :

$a_1 = 3$
$a_2 = 7$
$a_3 = 11$
$\vdots$

Il est nécessaire d'ajouter 4 allumettes au nombre d'allumettes d'un étage pour créer un étage de plus. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc arithmétique de raison 4.

Le nombre d'allumettes pour faire 20 étages est alors égal à $\dfrac{3+(3+19\times 4)}{2}\times 20$.

Ainsi, il faut 820 allumettes pour réaliser 20 étages.

Exercice 10 ▶ Impairs consécutifs

Déterminer une méthode pour trouver le premier nombre d'une suite de n nombres impairs consécutifs dont la somme est égale à un nombre S.

Notons $2k+1$ le premier nombre impair de la suite. Alors :

$$(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)+\cdots+(2k+p_n) = S$$

où p_n est un entier naturel impair.
Ainsi :

$$2nk+(1+3+5+7+\cdots+p_n) = S\ ,$$

soit :

$$k = \frac{S-(1+3+5+\cdots+p_n)}{2n}.$$

Cherchons maintenant à exprimer p_n en fonction de n.

On a :

$$p_1 = 1$$
$$p_2 = 3$$
$$p_3 = 5$$
$$\vdots$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 2. Donc :

$$p_n = 1+2(n-1) = 2n-1$$

et donc :

$$1+3+\cdots+p_n = n\times\frac{1+(2n-1)}{2} = n^2.$$

Le premier nombre de la suite est donc $\boldsymbol{2k+1 = 2\times\dfrac{S-n^2}{2n}+1 = \dfrac{S-n^2}{n}+1.}$

Exercice 11

On sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique telle que $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ et $u_6 = 20$.
Déterminer la raison de cette suite ainsi que son premier terme.

On sait que $u_n = u_0 + nr$ donc :

$$\begin{aligned} u_2 + u_3 + u_4 &= u_0 + 2r + u_0 + 3r + u_0 + 4r \\ 15 &= 3u_0 + 9r \\ 5 &= u_0 + 3r \end{aligned}$$

De plus, $u_6 = 20 = u_0 + 6r$.
On a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3r + u_0 = 5 & L_1 \\ 6r + u_0 = 20 & L_2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 3r + u_0 = 5 & L_1 \\ \quad 3r = 15 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 3r + u_0 = 5 & L_1 \\ \quad r = 5 & L_2 \end{cases} \\ \iff & \boxed{\begin{cases} u_0 = -10 \\ r = 5 \end{cases}} \end{aligned}$$

Exercice 12 ▶ La somme des âges

Une personne remarque que son âge ainsi que celui des 4 personnes qui l'accompagnent forment une progression arithmétique.
La somme des carrés des âges est égale à 1 980 et la somme des âges est égale à 90.
Quel est l'âge de chaque personne ?

Notons a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 l'âge des 5 personnes, en convenant d'avoir :

$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_1 + 2r$
$a_4 = a_1 + 3r$
$a_5 = a_1 + 4r$

Ainsi, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10r$ et donc :

$$5a_1 + 10r = 90\ ,$$

soit :

$$a_1 + 2r = 18\ ,$$

ou encore :

$$\boldsymbol{a_1 = 18 - 2r}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
& a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1\,980 \\
\iff & 5a_1^2 + 30r^2 + 20a_1 r = 1\,980 \\
\iff & a_1^2 + 6r^2 + 4a_1 r = 396 \\
\iff & (18-2r)^2 + 6r^2 + 4(18-2r)r = 396 \\
\iff & 324 - 72r + 4r^2 + 6r^2 + 72 - 8r = 396 \\
\iff & 10r^2 - 80r = 0 \\
\iff & r = 8
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 18 - 2 \times 8 = 2 \\
a_2 &= 2 + 8 = 10 \\
a_3 &= 10 + 8 = 18 \\
a_4 &= 18 + 8 = 26 \\
a_5 &= 26 + 8 = 34
\end{aligned}$$

Exercice 13 ▶ Le numéro de page

En additionnant le numéro des pages d'un magazine que j'ai lu, j'obtiens 351. En ajoutant le numéro des pages que je n'ai pas encore lues, j'obtiens 469.
À quelle page suis-je et combien y a-t-il de pages dans ce magazine ?

Notons n le nombre total de pages du magazine et k le numéro de la page où je suis (que j'ai lue). Alors :

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \cdots + k &= 351 \\
\frac{k(k+1)}{2} &= 351 \\
k(k+1) &= 702 \\
k^2 + k - 702 &= 0
\end{aligned}$$

Nous avons une équation de degré 2 donc le discriminant est $1 + 4 \times 702 = 2\,809$, soit 53^2 donc $k = \dfrac{-1+53}{2} = 26$ (n'oublions pas que $k > 0$).
De plus :

$$\begin{aligned}
(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - 351 &= 469 \\
n(n+1) &= 2 \times (469 + 351) \\
n(n+1) &= 1\,640 \\
n^2 + n - 1\,640 &= 0
\end{aligned}$$

Nous avons alors une équation de degré 2 donc le discriminant est $1 + 4 \times 1\,640 = 6\,561$, soit 81^2 donc $n = \dfrac{-1+81}{2} = 40$.

Ainsi, mon magazine comporte 40 pages dont 26 ont déjà été lues.

Exercice 14 ▶ Le triangle rectangle arithmétique

ABC est un triangle rectangle dont le plus petit côté mesure 1 cm et dont la mesure des côtés sont trois termes d'une suite arithmétique.
Quelles sont les longueurs manquantes ?

Notons $u_0 = 1$, $u_1 = 1 + r$ et $u_2 = 1 + 2r$.
Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} & u_2^2 = u_0^2 + u_1^2 \\ \Longleftrightarrow\ & (1+2r)^2 = 1^2 + (1+r)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 1 + 4r + 4r^2 = 1 + 1 + 2r + r^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 3r^2 + 2r - 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation de degré 2 est égal à :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 = 4^2$$

donc les deux raisons possibles sont :

$$r = \frac{-2-4}{6} = -1 \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}.$$

Or, $r = -1$ est impossible car la suite doit être croissante (car $u_2 > u_1 > u_0$).

Ainsi, les cotés du triangle mesurent 1 cm, $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$ cm et $\boldsymbol{\frac{5}{3}}$ cm.

Exercice 15 ▶ Somme des premiers impairs

Calculer la somme des n premiers nombres impairs.

La somme que nous devons exprimer en fonction de n est :

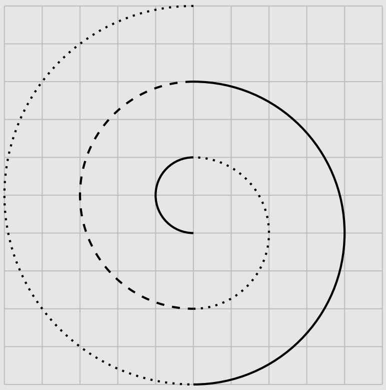
$$I_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1).$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + (2n-2) + (2n-1) + 2n - (2 + 4 + 6 + \cdots + 2n) \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} - 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &= n(2n+1) - n(n+1) \\ &= n(2n + 1 - n - 1) \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Ainsi, la somme des $\boldsymbol{n}$ premiers nombres impairs est égale à $\boldsymbol{n^2}$.

Exercice 16 ▶ Une spirale



On construit une spirale comme ci-contre à l'aide de n demi-cercles (*Ici*, $n = 5$).
Déterminer en fonction de n la longueur de cette spirale (on supposera que l'unité est la longueur d'un côté de carreau).

Notons ℓ_n la longueur du demi-cercle n. On a alors :

$\ell_1 = 2\pi$
$\ell_2 = 4\pi$
$\ell_3 = 6\pi$
$\ell_4 = 8\pi$
$\vdots$
La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite arithmétique de raison 2π. Ainsi :

$$\begin{aligned}\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_n &= 2\pi(1+2+3+4+\cdots+n)\\ &= 2\pi\times\frac{n(n+1)}{2}\\ &= n(n+1)\pi.\end{aligned}$$

Ainsi, la longueur totale de la spirale est égale à $n(n+1)\pi$.

Exercice 17 ▶ Monter qu'une suite est arithmétique

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n-4}{u_n-1}\end{cases} \qquad ; \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{u_n-2}$$

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $2 < u_n \leqslant 4$, puis que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $2 < u_n \leqslant 4$:

- $u_1 = 4 \in]2\,;4]$.
  L'initialisation est donc faite.
- Supposons qu'à un certain rang n, $2 < u_n \leqslant 4$. On a :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n-3-1}{u_n-1} = \frac{3(u_n-1)}{u_n-1} - \frac{1}{u_n-1} = 3 - \frac{1}{u_n-1}.$$

Or, par hypothèse de récurrence :

$$2 < u_n \leqslant 4 ,$$

donc :

$$1 < u_n - 1 \leqslant 3 ,$$

ou encore :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{u_n - 1} < 1.$$

Ainsi :

$$-1 < -\frac{1}{u_n - 1} \leqslant -\frac{1}{3}$$

et donc :

$$3 - 1 < 3 - \frac{1}{u_n - 1} \leqslant 3 - \frac{1}{3} ,$$

soit :

$$2 < u_{n+1} \leqslant \frac{8}{3} < 4.$$

Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n non nul, $2 < u_n \leqslant 4$, ce qui nous assure que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie (car $u_n \neq 2$).
De plus, pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 2} \\
&= \frac{1}{\frac{3u_n - 4}{u_n - 1} - 2} \\
&= \frac{u_n - 1}{3u_n - 4 - 2u_n + 2} \\
&= \frac{u_n - 1}{u_n - 2} \\
&= \frac{u_n - 2 + 1}{u_n - 2} \\
&= \frac{u_n - 2}{u_n - 2} + \frac{1}{u_n - 2} \\
v_{n+1} &= 1 + v_n.
\end{aligned}$$

On a alors montré que $v_{n+1} = v_n + 1$, ce qui signifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **une suite arithmétique de raison 1.**

Exercice 18 ▶ Algorithmique

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 2 et de raison 0,75.
Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 1\,000$ puis construire un algorithme qui détermine cette valeur en affichant les termes successifs de la suite jusqu'à ce rang.

- **Partie calculatoire.**
La suite est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 0{,}75$ donc, d'après le cours, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ &= 2 + 0{,}75n. \end{aligned}$$

Ainsi :
$$\begin{aligned} u_n \geqslant 1\,000 &\iff 2 + 0{,}75n \geqslant 1\,000 \\ &\iff 0{,}75n \geqslant 998 \\ &\iff n \geqslant \frac{998}{0{,}75} \\ &\iff n \geqslant 1\,330{,}67. \end{aligned}$$

Ainsi, la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 1\,000$ est $n = 1\,331$.

- **Partie algorithmique.**
Un algorithme possible est le suivant (sans se soucier de la mise en forme de la sortie) :

Algorithme 2: Affichage des termes d'une suite arithmétique

Entrées
  $u \in \mathbb{R}$
  $n \in \mathbb{N}$
Traitement
  $u \leftarrow 2$ (terme initial de la suite)
  $n \leftarrow 0$ (rang initial de la suite)
  Tant que $u < 1\,000$
    $u \leftarrow u + 0.75$ (on calcule la valeur du terme suivant)
    $n \leftarrow n + 1$ (on incrémente le rang)
  Fin du Tant que
Sortie
  Afficher u (premier terme supérieur à 1 000)
  Afficher n (premier rang n pour lequel le terme est supérieur à 1 000)

Exercice 19 ▶ Algorithmique

En prenant la suite de l'exercice précédent, déterminer par le calcul le plus petite entier naturel n tel que :

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \geqslant 1\,000.$$

Construire ensuite un algorithme qui affiche les valeurs successives de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à obtenir une valeur plus grande que 1 000.

- **Partie calculatoire.**
  On sait, d'après le cours, que $s_n = (n+1)(2+0{,}375n)$ et :

$$\begin{aligned} s_n \geqslant 1\,000 &\iff 2n + 2 + 0{,}375n^2 + 0{,}375n \geqslant 1\,000 \\ &\iff 0{,}375n^2 + 2{,}375n - 998 \geqslant 0. \end{aligned}$$

  Le discriminant du membre de droite de cette dernière inéquation est :

$$\begin{aligned} \Delta &= 2{,}375^2 - 4 \times 0{,}375 \times (-998) \\ &= 5{,}640\,625 + 1\,497 \\ &= 1\,502{,}640\,625. \end{aligned}$$

  Donc, ses racines sont :

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-2{,}375 - \sqrt{1\,502{,}640\,625}}{0{,}75} \\ &\approx -54{,}85 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n_2 &= \frac{-2{,}375 + \sqrt{1\,502{,}640\,625}}{0{,}75} \\ &\approx 48{,}6 \end{aligned}$$

  Le trinôme du second degré est positif à l'extérieur de ses racines.

  Ainsi, le plus petit entier naturel n tel que la somme est supérieure à 1 000 est $n = 49$.

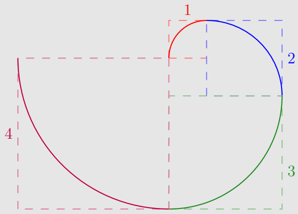
- **Partie algorithmique.**
  Un algorithme possible est le suivant :

Algorithme 3: Somme des termes d'une suite arithmétique

$s \in \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N}$
Traitement
  $s \leftarrow 2$ (terme initial de la somme)
  $n \leftarrow 0$ (rang initial de la suite)
  Tant que $s < 1\,000$
    $n \leftarrow n + 1$ (on incrémente le rang)
    $s \leftarrow s + 2 + 0.75 \times n$ (on calcule la somme)
  Fin du Tant que
Sortie
  Afficher s (premier terme supérieur à 1 000)
  Afficher n (premier rang n pour lequel la somme est supérieure à 1 000)

Exercice 20 ▶ Une spirale

On construit une spirale comme ci-dessous :



Déterminer la longueur de cette spirale lorsqu'il y a *n* quarts de cercle.
Sur la figure ci-dessus, il y a 4 quarts de cercle.

Notons u_n la longueur du n-ième quart de cercle. On a alors :

$$u_1 = \frac{\pi}{2} \times 1 \ ; \ u_2 = \frac{\pi}{2} \times 2 \ ; \ u_3 = \frac{\pi}{2} \times 3 \ ; \ \dots ; \ u_n = \frac{\pi n}{2}.$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$ et de premier terme $u_1 = \frac{\pi}{2}$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= \frac{\pi}{2}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{\pi n(n+1)}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, la longueur de cette spirale est $\boldsymbol{\frac{\pi n(n+1)}{4}}$.

Suites arithmétiques de degré d

4

Nous avons vu dans le chapitre précédent une catégorie de suites bien connue en France, et ailleurs. Maintenant, nous allons voir qu'en définitive, les suites arithmétiques constituent un cas particulier d'une autre catégorie de suites bien plus large...

Définition 12

Une suite $\left(u_n^{(0)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique de degré d** s'il existe un entier naturel d non nul et une famille de suites $\left\{\left(u_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(u_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, \left(u_n^{(d)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ qui satisfait la propriété suivante :

$$\forall\, p \in [\![0; d-1]\!],\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^{(p)} = u_{n-1}^{(p)} + u_{n-1}^{(p+1)}$$

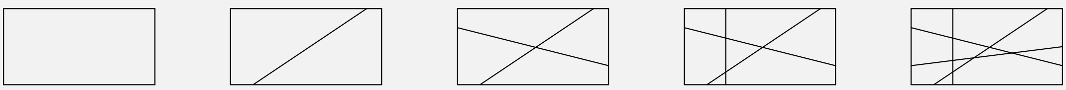
où $\left(u_n^{(d)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
La raison de la suite $\left(u_n^{(0)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la valeur de cette constante.

Cette définition est relativement compliquée à comprendre ; c'est la raison pour laquelle nous allons tout de suite voir un exemple concret.

Exemple 6 ▶ Partage du plan

Si on trace n droites dans un plan, combien de régions au maximum peut-on former ?

Assimilons le plan à une rectangle et notons $u_n^{(0)}$ le nombre maximum de régions formées en traçant n droites. Regardons ce qui se passe pour les premières valeurs de n :



$u_0^{(0)} = 1$ $\quad u_1^{(0)} = 2$ $\quad u_1^{(0)} = 4$ $\quad u_2^{(0)} = 7$ $\quad u_3^{(0)} = 11$

$u_0^{(1)} = +1$ $\quad u_1^{(1)} = +2$ $\quad u_2^{(1)} = +3$ $\quad u_3^{(1)} = +4$

$u_0^{(2)} = +1$ $\quad u_1^{(2)} = +1$ $\quad u_2^{(2)} = +1$

L'idée consiste donc à « décomposer » la suite initiale en plusieurs sommes de suites jusqu'à obtenir une suite constante (l'avant dernière suite est donc une suite arithmétique simple).

Comme pour n'importe quelle suite définie de façon récursive, nous allons exprimer le terme général en fonction de n et d. Mais avant cela, voyons un premier résultat qui nous servira :

Proposition 12

Soit une famille de polynômes $(P_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ à coefficients rationnels telle que :

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ P_0(n) = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ P_{k+1}(n) = P_k(1) + P_k(2) + \cdots + P_k(n) \end{cases}$$

Alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in [\![1; n-1]\!],\ P_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial.

Montrons cela par récurrence sur k :

- **Initialisation.**
  Par définition,

$$\begin{aligned} P_1(n) &= P_0(1) + P_0(2) + \cdots + P_0(n) \\ &= 1 + 1 + \cdots + 1 \\ &= n. \end{aligned}$$

  Or,

$$\binom{n+1-1}{1} = n.$$

  La formule est donc vraie pour $k = 1$. L'initialisation est alors réalisée.

- **Hérédité**.
  Supposons que la formule soit vraie pour un certain rang $k < n - 1$.

$$\begin{aligned} P_{k+1}(n) &= \sum_{m=1}^{n} \binom{m+k-1}{k} \\ &= \sum_{j=k}^{n+k-1} \binom{j}{k} \\ &= \binom{n+k}{k+1} \text{ (formule de combinatoire)} \end{aligned}$$

  Ainsi, l'hérédité est vérifiée donc la proposition est vraie. ■

À l'aide de la proposition 12, nous allons pouvoir démontrer le théorème suivant :

Théorème 4

Soit $\left(u_n^{(0)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de degré d et de raison r. Alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n^{(0)} = \sum_{m=0}^{d-1} \left(u_0^{(m)} P_m(n)\right) + r P_d(n)$$

Pour montrer ce dernier résultat, faisons une récurrence sur d.

- **Initialisation.**
  Nous savons que la suite $\left(u_n^{(d-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = u_0^{(d)}$.
  Donc, $u_n^{(d-1)} = u_0^{(d-1)} + nr$.
  D'où :

$$\begin{aligned}
u_n^{(d-2)} &= u_{n-1}^{(d-2)} + u_n^{(d-1)} \\
&= u_{n-1}^{(d-2)} + u_0^{(d-1)} + nr \\
&= u_{n-2}^{(d-2)} + u_{n-1}^{(d-1)} + u_0^{(d-1)} + nr \\
&= u_{n-2}^{(d-2)} + u_0^{(d-1)} + (n-1)r + u_0^{(d-1)} + nr \\
&= \dots \\
&= u_{n-p}^{(d-2)} + p u_0^{(d-1)} + [n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-p+1)]\, r \\
&= \dots \\
&= u_0^{(d-2)} + n u_0^{(d-1)} + \frac{n(n+1)}{2} r.
\end{aligned}$$

  Si on prend $d = 2$, nous avons la formule du théorème. L'initialisation est alors réalisée.

- **Hérédité.**
  Supposons maintenant que la formule soit vraie pour une suite arithmétique de degré fixé $d > 2$ et considérons la suite arithmétique $\left(u_n^{(0)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de degré $(d+1)$. Alors, la suite $\left(u_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de degré d donc :

$$u_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{d-1} \left(u_0^{(m+1)} P_m(n)\right) + r P_d(n).$$

  Or, $u_n^{(0)} = u_{n-1}^{(0)} + u_n^{(1)}$.

  Donc :

$$\begin{aligned}
u_n^{(0)} &= u_{n-1}^{(0)} + \sum_{m=0}^{d-1} \left(u_0^{(m+1)} P_m(n)\right) + r P_d(n) \\
&= u_{n-2}^{(0)} + u_{n-1}^{(1)} + \sum_{m=0}^{d-1} \left(u_0^{(m+1)} P_m(n)\right) + r P_d(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_n^{(0)} &= u_{n-2}^{(0)} + \sum_{m=0}^{d-1} \left(u_0^{(m+1)} P_m(n-1)\right) + rP_d(n-1) + \sum_{m=0}^{d-1} \left(u_0^{(m+1)} P_m(n)\right) + rP_d(n) \\
&= u_{n-2}^{(0)} + \sum_{m=0}^{d-1} \left[u_0^{(m+1)} \left(P_m(n-1) + P_m(n)\right)\right] + r\left(P_d(n-1) + P_d(n)\right)
\end{aligned}$$

En remplaçant $u_{n-2}^{(0)}$ par $u_{n-3}^{(0)} + \sum_{m=0}^{d-1} \left(u_0^{(m+1)} P_m(n-2)\right) + rP_d(n-2)$, on a :

$$\begin{aligned}
u_n^{(0)} = u_{n-3}^{(0)} + \sum_{m=0}^{d-1} \left[u_0^{(m+1)} \left(P_m(n-2) + P_m(n-1) + P_m(n)\right)\right] \\
+ r\left(P_d(n-2) + P_d(n-1) + P_d(n)\right)
\end{aligned}$$

On voit alors se former la relation suivante pour tout entier naturel $p \leqslant n$:

$$u_n^{(0)} = u_{n-p}^{(0)} + \sum_{m=0}^{d-1} \left(u_n^{(m+1)} \sum_{j=0}^{p-1} P_m(n-j)\right) + r\sum_{j=0}^{p-1} P_d(n-j)$$

Et donc, en prenant $p = n$:

$$u_n^{(0)} = u_0^{(0)} + \sum_{m=0}^{d-1} \left(u_n^{(m+1)} \sum_{j=0}^{n-1} P_m(n-j)\right) + r\sum_{j=0}^{n-1} P_d(n-j) \ ,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$u_n^{(0)} = u_0^{(0)} + \sum_{m=0}^{d-1} \left(u_n^{(m+1)} \sum_{j=1}^{n} P_m(j)\right) + r\sum_{j=1}^{n} P_d(j) \ ,$$

c'est-à-dire :

$$u_n^{(0)} = u_0^{(0)} + \sum_{m=0}^{d-1} \left(u_n^{(m+1)} P_{m+1}(n)\right) + rP_{d+1}(n)$$

et donc :

$$u_n^{(0)} = u_0^{(0)} + \sum_{m=1}^{d} \left(u_n^{(m)} P_m(n)\right) + rP_{d+1}(n) \ ,$$

soit finalement :

$$u_n^{(0)} = \sum_{m=0}^{d} \left(u_n^{(m)} P_m(n)\right) + rP_{d+1}(n).$$

L'hérédité est alors vérifiée, ce qui démontre le théorème. ■

Ce dernier théorème nous montre que le terme général d'une suite arithmétique de degré d s'exprime comme un polynôme de degré d, d'où le résultat suivant :

Proposition 13

Soit $\left(u_n^{(0)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de degré d.
Alors, il existe un $(d+1)-$uplet $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n^{(0)} = \alpha_d n^d + \alpha_{d-1}n^{d-1} + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0\ .$$

Pour déterminer la valeur des coefficients α_k, il suffit de résoudre le système linéaire de Vandermonde suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1^{(0)} & = & \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \\ u_2^{(0)} & = & \alpha_0 + 2\alpha_1 + \cdots + 2^d\alpha_d \\ \vdots & & \\ u_{d+1}^{(0)} & = & \alpha_0 + (d+1)\alpha_1 + \cdots + (d+1)^d\alpha_d \end{array}\right.$$

dont le déterminant est :

$$D = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant d+1} \left(j^2 - i^2\right).$$

On peut ainsi déterminer chacun des coefficients en nommant :

$$A = \begin{pmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \\ \vdots \\ u_{d+1}^{(0)} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in [\![0;d]\!],\ V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2^k \\ \vdots \\ (d+1)^k \end{pmatrix}$$

à l'aide de la formule de Cramer :

$$\alpha_k = \frac{\det\left(V_0,V_1,\cdots,V_{k-1},A,V_{k+1},\cdots,V_d\right)}{D}.$$

Revenons maintenant à notre problème de partage de plan à l'aide de n droites de l'exemple 6. On doit résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = \alpha_0 \\ 2 = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 4 = 1 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{array}\right.$$

On trouve ainsi :

$$u_n^{(0)} = 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

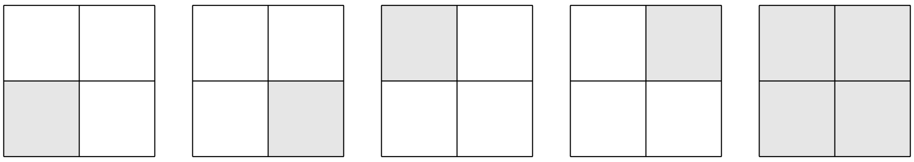
Par exemple, un plan sera partagé au maximum en 551 régions si on trace 100 droites.

Exercice 21 ▶ Grille et carrés

Dans une grille formée de $n \times n$ carreaux, combien peut-on compter au maximum de carrés ?

Désignons par $\left(u_n^{(0)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite représentant les nombres maximums de carrés. Regardons pour les premières valeurs de n :

- Pour $n = 0$, il n'y a aucun carré. $\boldsymbol{u_0^{(0)} = 0}$.
- Pour $n = 1$, il n'y a qu'un carré. $\boldsymbol{u_1^{(0)} = 1}$.
- Pour $n = 2$, il y a au maximum 5 carrés. $\boldsymbol{u_2^{(0)} = 5}$.



- Pour $n = 3$, il y a au maximum 14 carrés. $\boldsymbol{u_3^{(0)} = 14}$.
- Pour $n = 4$, il y a au maximum 30 carrés. $\boldsymbol{u_4^{(0)} = 30}$.

On a le schéma suivant :

$$u_0^{(0)} = 0 \quad u_1^{(0)} = 1 \quad u_2^{(0)} = 5 \quad u_3^{(0)} = 14 \quad u_4^{(0)} = 30 \quad u_5^{(0)} = 55$$

$$u_0^{(1)} = +1 \quad u_1^{(1)} = +4 \quad u_2^{(1)} = +9 \quad u_3^{(1)} = +16 \quad u_4^{(1)} = +25$$

$$u_0^{(2)} = +3 \quad u_1^{(2)} = +5 \quad u_2^{(2)} = +7 \quad u_3^{(2)} = +9$$

$$u_0^{(3)} = +2 \quad u_1^{(3)} = +2 \quad u_2^{(3)} = +2$$

La suite $\left(u_n^{(0)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de degré 3 et de raison 2, d'où le système matriciel :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

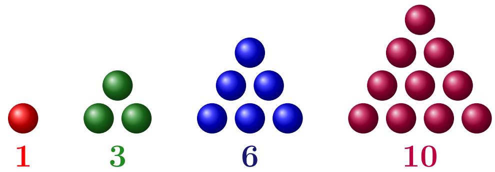
On obtient :

$$u_n^{(0)} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

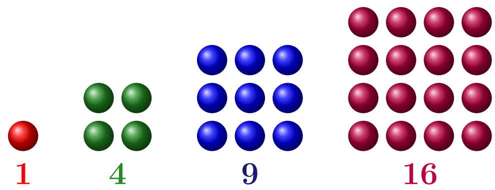
Ainsi, une grille 100 × 100 comptera 338 350 carrés au maximum.

Dans la famille des suites arithmétiques de degré d, il y a aussi les nombres polygonaux. Nous allons nous pencher dessus.

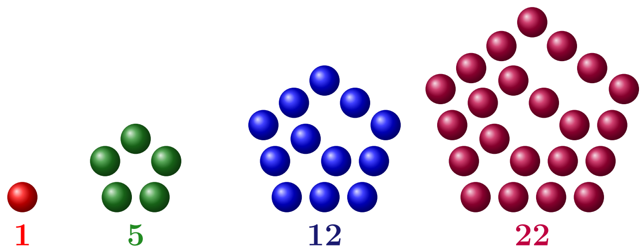
- **Les nombres triangulaires.**
  On peut les représenter schématiquement ainsi :



- **Les nombres carrés.**
  On peut les représenter schématiquement ainsi :



- **Les nombres pentagonaux.**
  On peut les représenter schématiquement ainsi :



Notons $u_n^{(p)}$ le $(n+1)^{\text{e}}$ nombre p-gonal, $p \geqslant 3$. Alors :

- La suite $\left(u_n^{(3)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de degré 2 et de raison 1.
- La suite $\left(u_n^{(4)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de degré 2 et de raison 2.
- La suite $\left(u_n^{(5)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de degré 2 et de raison 3.
- a suite $\left(u_n^{(6)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de degré 2 et de raison 4.
- etc.

Proposition 14

Soit $\left(u_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $p-$gonale.
Alors,

$$\forall\, p \geqslant 3,\ u_n^{(p)} = \frac{n\,(4-p+(p-2)n)}{2}.$$

On peut conjecturer, en regardant nos exemples précédents, que la suite $p-$gonale est arithmétique de degré 2 et de raison $(p-2)$ et donc :

$$u_{n+1}^{(p)} = u_n^{(p)} + a_{n-1}\ ,$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison $p-2$, donc :

$$a_{n-1} = (p-1) + (p-2)(n-1).$$

On a alors :

$$u_{n+1}^{(p)} - u_n^{(p)} = p - 1 + (p-2)(n-1)\ ,$$

d'où, par somme :

$$\sum_{n=1}^{N} \left(u_{n+1}^{(p)} - u_n^{(p)}\right) = \sum_{n=1}^{N} \left[p - 1 + (p-2)(n-1)\right]\ ,$$

soit :

$$\begin{aligned} u_{N+1}^{(p)} - u_1^{(p)} &= \sum_{n=1}^{N}(p-1) + (p-2)\sum_{n=1}^{N}(n-1) \\ &= N(p-1) + (p-2)\frac{N(N-1)}{2}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $p \geqslant 3$, $u_1^{(p)} = 1$ donc, en posant $N = n-1$, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n^{(p)} &= 1 + (p-1)(n-1) + (p-2)\frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(2 + 2(p-1)(n-1) + (p-2)n^2 - 3(p-2)n + 2(p-2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((4-p)n + (p-2)n^2\right) \\ &= \frac{1}{2}n\left(4 - p + (p-2)n\right) \end{aligned}$$

■

Vous trouverez pages suivantes deux exercices d'algorithmique sur les suites arithmétiques de degré d.

Exercice 22 ▶ Algorithme de génération

Construire un algorithme permettant d'afficher les 10 premiers termes d'une suite arithmétique de degré 7, de raison 3 et telle que les premiers termes de chaque suite valent 1.
Donner alors le 10$^{\text{e}}$ terme.

Algorithme 4: Génération d'une suite arithmétique de degré 7 et de raison 3

Entrées
  $u \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ `(tableau à 2 dimensions)`
  $i \in \mathbb{N}$
  $j \in \mathbb{N}$
Traitement
  $i \leftarrow 0$
  $j \leftarrow 0$
  Tant que $i < 7$
    $u[i][0] \leftarrow 1$ `(1`$^{\text{er}}$ `terme de chaque suite)`
    $i \leftarrow i + 1$ `(on incrémente le rang)`
  Fin du Tant que $i \leftarrow 7$
  Tant que $i >= 0$
    Tant que $j < 10$
      Si $i = 7$ **alors**
        $u[i][j] \leftarrow 3$
      sinon
        $u[i][j] \leftarrow u[i][j-1] + u[i+1][j-1]$
      Fin du Si $j \leftarrow j + 1$
    Fin du Tant que $i \leftarrow i - 1$
    $j \leftarrow 1$
  Fin du Tant que
Sortie
  `Afficher` $u[0][j]$ `pour` $j \in [\![0;9]\!]$

On voit alors que le 10$^{\text{e}}$ terme est égal à 574.

Exercice 23 ▶ Reconnaître une suite arithmétique de degré d

On donne les premiers termes d'une suite :

$$u_0 = 1 \ ; \ u_1 = 2 \ ; \ u_2 = 4 \ ; \ u_3 = 8 \ ; \ u_4 = 16 \ ; \\ u_5 = 32 \ ; \ u_6 = 66 \ ; \ u_7 = 141 \ ; \ u_8 = 303 \ ; \ u_9 = 634$$

À l'aide d'un algorithme, montrer qu'ils constituent les premiers termes d'une suite arithmétique de degré et de raison que l'on précisera.

Algorithme 5: Reconnaître une suite arithmétique de degré d

Entrées
  $u \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ `(tableau à 2 dimensions)`
  $d \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ `(tableau à 1 dimension)`
  $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$
Traitement
  $u[0][0] \leftarrow 1$
  $u[0][1] \leftarrow 2$
  $u[0][2] \leftarrow 4$
  $u[0][3] \leftarrow 8$
  $u[0][4] \leftarrow 16$
  $u[0][5] \leftarrow 32$
  $u[0][6] \leftarrow 66$
  $u[0][7] \leftarrow 141$
  $u[0][8] \leftarrow 303$
  $u[0][9] \leftarrow 634$
  Pour i **allant de 0 à 9**
    Pour j **allant de 0 à** $9 - i$
      $u[i][j] = u[i-1][j+1] - u[i-1][j]$
      Si $j > 0$ **alors**
        $d[j] = u[i][j] - u[i][j-1]$
      Fin du Si
    Fin du Pour
    Si toutes les valeurs du tableau d **sont égales alors**
      `Afficher : « Degré =` i `et Raison =` $u[i][0]$ `»`
    Fin du Si
  Fin du Pour

Suites géométriques 5

Au lycée, on aborde le thème des suites numériques et l'on étudie deux types de suites : les suites arithmétiques et celles que nous allons voir dans ce chapitre.

Définition 13 ▶ Suites géométriques

Une suite géométrique est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que n'importe quel terme est le produit du terme précédent par une constante :

$$\exists\, q \in \mathbb{K}, \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n\ .$$

« q » est alors appelé la raison de la suite.

Cette appellation vient du fait que tout terme autre que le premier est la moyenne géométrique des termes qui l'entourent.
En effet, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\ ,$$

d'où :

$$u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}.$$

Or,

- Si $q > 0$, alors tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même signe, ce qui signifie que $u_n \times u_{n+2} > 0$.
- Si $q < 0$, alors u_{n+1} et u_n n'auront pas les mêmes signes, de même pour u_{n+2} et u_{n+1} ; donc u_n et u_{n+2} auront le même signe, ce qui signifie que $u_n \times u_{n+2} > 0$.

Ainsi :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n \times u_{n+1}}.$$

On peut alors dire que u_{n+1} est la *moyenne géométrique* de u_n et u_{n+2}.

Exemple 7 ▶ Puissances de 2

La suite des puissances de 2, définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n$, est une suite géométrique de raison $q = 2$. En effet, pour passer d'un terme à l'autre, on doit multiplier par 2 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2^{n+1} \\ &= 2 \times 2^n \\ &= 2 \times u_n. \end{aligned}$$

Comme pour toute suite définie de façon récursive, nous allons voir comment exprimer le terme général de la suite uniquement en fonction de son rang.

Proposition 15 ▶ Expression du terme d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.
Alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = u_0 \times q^n.$$

De façon générale, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, \forall\, p \in [\![0;n]\!],\, u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Montrons la seconde égalité par récurrence sur n.

- **Initialisation.**
  Si $n = 0$, alors $p = 0$ et l'égalité devient :
  $$u_0 = u_0 \times q^0\ ,$$
  ce qui est vrai. Donc l'initialisation est réalisée.

- **Hérédité.**
  Supposons qu'à un certain rang n, on a :
  $$\forall\, n \in \mathbb{N},\, \forall\, p \in [\![0;n]\!],\, u_n = u_p \times q^{(n-p)}.$$
  Alors :
  $$\begin{aligned} u_{\boldsymbol{n+1}} &= q \times u_n \\ &= q \times u_p \times q^{n-p} \\ &= u_p \times q^{\boldsymbol{n+1}-p}\ . \end{aligned}$$
  L'hérédité est alors vérifiée. Ce qui démontre la seconde égalité.

Ensuite, en prenant $p = 0$ dans cette égalité, on arrive à la première égalité de la proposition.■

Exercice 24 ▶ Population microbienne

Une population microbienne voit son effectif augmenter d'à peu près 10 % toutes les heures.
Sachant qu'elle comporte 200 individus au moment où nous l'observons, qu'en sera-t-il au bout de 24 heures ?

Notons u_n le nombre de microbes au bout de n heures, avec $u_0 = 200$.
Alors, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{10}{100}u_n = 1{,}1u_n$ pour tout entier naturel n.
Cela implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 1{,}1$.
Ainsi, $g_{24} = (1{,}1)^{24} \times 200 \approx 1\,970$.

Il y aura donc environ 1 970 microbes au bout de 24 heures.

Comment reconnaître une suite géométrique ?

Il y a plusieurs façons de voir si une suite est géométrique ou non suivant la façon dont elle est définie.

- Si la suite est implicite d'après un énoncé (comme l'exemple précédent) et nous mène à voir qu'un terme est le produit du terme précédent par une constante, alors la suite est géométrique.
- Si le terme général de la suite est donné de façon explicite, comme par exemple : $u_n = \pi \times 4^n$, alors cela ressemble au résultat de la proposition précédente et donc, la suite est géométrique.
- Si le terme général de la suite est donné de façon explicite, mais ne ressemble pas au résultat de la proposition précédente, on tente de calculer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ afin de trouver si c'est une constante ou non.

Exemple 8 ▶ Reconnaître une suite géométrique

- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 5{,}3 \times 6{,}7^{n+1}.$$

Alors, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} u_n &= 5{,}3 \times 6{,}7 \times 6{,}7^n \\ &= 35{,}51 \times 6{,}7^n. \end{aligned}$$

Nous avons écrit u_n sous la forme $u_0 \times q^n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 6{,}7$ et de premier terme $u_0 = 35{,}51$.

- Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{4^n}{3^{n+1}}.$$

Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{4^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{4^n}{3^{n+1}}} \\ &= \frac{4^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{4^n} \\ &= \frac{4^{n+1}}{4^n} \times \frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} \\ &= 4 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant pour tout entier naturel n. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{4^0}{3^{0+1}} = \dfrac{1}{3}$.

De façon assez intuitive, nous pouvons avoir une idée du comportement d'une suite géométrique en fonction de la valeur de sa raison.
Voici un résultat qui résume ce que l'on peut dire :

Proposition 16 ▶ Comportement d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

- **Si $q > 1$**,
  - ▶ **Si $u_0 > 0$**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  - ▶ **Si $u_0 = 0$**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
  - ▶ **Si $u_0 < 0$**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- **Si $q < 1$**,
  - ▶ **Quel que soit le signe de u_0**, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante ni décroissante et sa limite n'existe pas.
  - ▶ **Si $u_0 = 0$**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- **Si $q = 1$**, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- **Si $q = -1$**, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante ni décroissante et sa limite n'existe pas. Il y a deux valeurs d'adhérences qui sont u_0 et $-u_0$.
- **Si $0 < q < 1$**,
  - ▶ **Si $u_0 > 0$**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
  - ▶ **Si $u_0 = 0$**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
  - ▶ **Si $u_0 < 0$**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- **Si $-1 < q < 0$**,
  - ▶ **Si $u_0 = 0$**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
  - ▶ **Si $u_0 \neq 0$**, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante ni décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On retiendra essentiellement de ceci que si une suite géométrique a une raison comprise entre -1 et 1, alors elle converge vers 0.

Penchons-nous maintenant sur la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Proposition 17 ▶ Somme des premiers termes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison non nulle q. Alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \begin{cases} (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}u_0 & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Le cas « $q = 1$ » est immédiat ; en effet, dans ce cas, tous les termes de la somme sont égaux à u_0. Or, il y en a $n+1$. Donc la somme est bien égale à $(n+1)u_0$.

Supposons donc que $q \neq 1$ et posons :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Alors,

$$S_n = u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \cdots + q^nu_0 \ ,$$

d'où :

$$\begin{aligned} qS_n &= qu_0 + q^2u_0 + q^3u_0 + \cdots + q^{n+1}u_0 \\ &= S_n - u_0 + q^{n+1}u_n \\ &= S_n + \left(q^{n+1} - 1\right) u_0. \end{aligned}$$

On a alors :

$$qS_n - S_n = \left(q^{n+1} - 1\right) u_0 \ ,$$

d'où :

$$S_n(q-1) = \left(q^{n+1} - 1\right) u_0$$

et donc :

$$S_n = \frac{\left(q^{n+1} - 1\right) u_0}{q-1}.$$

■

On peut aussi retenir cette formule ainsi :

$$\text{somme des premiers termes} \ = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes dans la somme}}}{1-q}$$

Exercice 25 ▶ La légende du jeu d'échecs

Selon la légende, le jeu d'échecs fut inventé en Inde par un savant. Le roi, séduit par ce nouveau loisir, le convoqua au palais :
« Ton jeu m'a redonné la joie de vivre ! Je t'offre ce que tu désires ! » lui dit-il.
Le sage ne voulait rien et ne dit mot. Le roi, offensé, s'énerva :
« Parle donc, insolent ! Tu as peur que je ne puisse exaucer tes souhaits ? »
Le sage fut blessé par ce ton et décida de se venger :
« J'accepte ton présent. Tu feras déposer un grain de blé sur la première case de l'échiquier. Tu feras mettre ensuite 2 grains sur la deuxième case, 4 sur la troisième, ... »
Le roi s'énerva pour de bon :
« Puisque tu honores si mal ma générosité, va-t'en ! Ton sac de blé te sera porté demain et ne me dérange plus ! »
Le lendemain matin, le roi fut réveillé par son intendant affolé :
« Sire, c'est une catastrophe ! Nous ne pouvons pas livrer le blé ! Nos mathématiciens ont travaillé toute la nuit : il n'y a pas assez de blé dans tout le royaume pour exaucer le souhait du savant ! »
Pourquoi une telle affirmation ?

Notons u_n le nombre de grains de blé posés sur la case n, pour $n \in [\![1;64]\!]$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 1$.

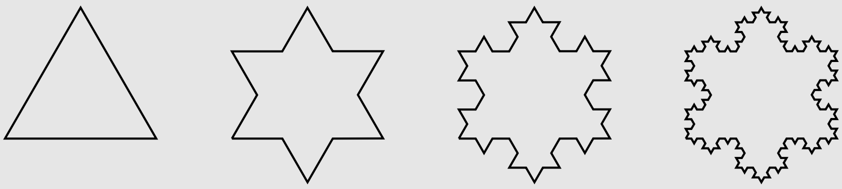
D'après la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= \frac{q^n - 1}{q - 1} \times u_1 \\ &= 2^{64} - 1 \\ &= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615. \end{aligned}$$

Un grain de blé pesant entre 30 et 50 mg (cf. page Wikipedia), la masse totale qu'il faudrait est supérieure à 553×10^{12} tonnes, ce qui était impossible.

Exercice 26 ▶ Flocon de Von Koch

On considère à l'étape 0 un triangle équilatéral de côté 1.
À l'étape 1, on partage chaque côté en 3 segments de même longueur puis on ôte le segment chaque central ; cet espace sert alors de base à un triangle équilatéral extérieur.
À l'étape 2, on réitère cette construction sur chaque triangle équilatéral comme le montre l'illustration suivante :



Quelle est l'aire et le périmètre du flocon de Von Koch à l'étape n ? À l'infini ?

Notons a_n l'aire du flocon de Von Koch à l'étape n. Alors :

$$a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

L'aire du flocon à l'étape n est la somme de l'aire du flocon à l'étape $n-1$ et de celle des nouveaux triangles équilatéraux.
Notons c_n le nombre de côtés à l'étape n, et d_n la longueur d'un de ces côtés. Alors :

$$a_n = a_{n-1} + c_{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{4} d_n^2$$

Or, la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 4, donc $c_n = 3 \times 4^n$.
De plus, la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 13, d'où $d_n = \frac{1}{3^n}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3 \times 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9^n} \\ &= a_{n-1} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \end{aligned}$$

Ainsi :

$$a_n - a_{n-1} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_n - a_{n-1}) &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3\sqrt{3}}{16}\times\left(\frac{4}{9}\right)^k\right]\\
a_n - a_0 &= \frac{3\sqrt{3}}{16}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k\\
a_n - a_0 &= \frac{3\sqrt{3}}{16}\times\frac{4}{9}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^k\\
a_n - a_0 &= \frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1}{\frac{4}{9}-1}\\
a_n - a_0 &= \frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{9}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]\\
\boldsymbol{a_n} &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]+\frac{\sqrt{3}}{4}}
\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}}.$$

Intéressons-nous maintenant au périmètre.
Notons alors p_n le périmètre du flocon de Von Koch à l'étape n. Alors :

$$\begin{aligned}
p_n &= c_n \times d_n\\
\boldsymbol{p_n} &= \boldsymbol{3\left(\frac{4}{3}\right)^n}.
\end{aligned}$$

Et on en déduit alors :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty}.$$

Exercice 27

Existe-t-il une suite telle que les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 soient à la fois en progression arithmétique et géométrique ?

Supposons qu'il existe une telle suite. Alors :

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_0 + 2r \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u_1 = qu_0 \\ u_2 = q^2u_0 \end{array}\right. \quad \text{donc :} \quad \left\{\begin{array}{ll} u_0 + r = qu_0 & (1) \\ u_0 + 2r = q^2u_0 & (2) \end{array}\right.$$

L'équation (1) nous donne : $r = (q-1)u_0$, donc l'équation (2) devient, si on admet que $u_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned}
u_0 + 2(q-1)u_0 = q^2u_0 &\iff 1 + 2q - 1 = q^2\\
&\iff q^2 - 2q + 1 = 0\\
&\iff (q-1)^2 = 0\\
&\iff q = 1
\end{aligned}$$

et donc $r = 0$.

On arrive donc à la conclusion que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
Toute suite constante est arithmétique (de raison nulle) et géométrique (de raison égale à 1).

Exercice 28 ▶ Le nénuphar

La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 30 jours, il a recouvert tout un étang.
Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?

C'est plus un problème de logique que de suite mais nous pouvons tout de même trouver la solution à l'aide d'une suite géométrique.
Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite représentant la fraction de l'étang recouverte par le nénuphar le n^e jour. Ainsi :

$$u_{29} = u_0 \times 2^{29}.$$

Or, nous savons que :

$$u_{29} = 1$$

car le nénuphar recouvre tout l'étang le 30e jour. Donc :

$$\begin{aligned} & u_0 \times 2^{29} = 1 \\ \iff & u_0 = 2^{-29}. \end{aligned}$$

On cherche n tel que $u_n = \frac{1}{2}$ sachant que $u_n = u_0 q^n$.
Donc :

$$\begin{aligned} 2^{-29} \times 2^n = 2^{-1} &\iff 2^n = 2^{28} \\ &\iff n = 28. \end{aligned}$$

Ainsi, c'est au 29e jour que le nénuphar avait recouvert la moitié de l'étang.

Bien entendu, si le nénuphar double sa taille chaque jour, le 29e jour, il avait la moitié de la taille du 30e jour.

Exercice 29 ▶ Dépréciation d'un prix

Au cours des trois années après l'achat d'une voiture, son prix est déprécié de 40 %.
Ensuite, il est déprécié de 10 % annuellement.
Monsieur ICKS achète une voiture à 20 000 €.
Combien vaudra-t-elle au bout de 10 ans (arrondir le résultat à l'euro près) ?

Notons u_0 le prix initial de la voiture et u_n le prix de cette voiture au bout de n années.
Au cours des 3 premières années, le prix diminue 40 % à chaque fois. Donc :

$$u_3 = u_0 \times 0{,}6^3.$$

Le prix baisse ensuite 10 % chaque année donc :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 3,\ u_n &= u_3 \times 0{,}9^{n-3}\\ &= 20\,000 \times 0{,}6^3 \times 0{,}9^{n-3}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_{10} = 20\,000 \times 0{,}6^{10} \times 0{,}9^7 = 2\,066{,}242\,608.$$

La voiture de monsieur Icks ne vaudra plus que 2 066 € dans 10 ans.

Exercice 30 ▶ Livret A

Le taux du Livret A était en 2015 de 0,75 %.
Monsieur Icks a déposé au 1er janvier 2016 une somme de 10 000 € et ne compte pas enlever le moindre centime pendant 10 ans.
De quel capital disposera-t-il dans 10 ans en supposant que le taux de ce livret reste inchangé ?

Notons u_n le capital du Livret A de monsieur Icks au bout de l'année n.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est implicitement géométrique de raison 1,0075. En effet, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + \frac{0{,}75}{100}u_n\\ &= u_n\left(1+\frac{0{,}75}{100}\right)\\ &= u_n \times 1{,}0075.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Donc :

$$\begin{aligned}u_{10} &= 10\,000 \times (1{,}0075)^{10}\\ &\approx 10\,775{,}82.\end{aligned}$$

Ainsi, monsieur Icks disposera de 10 775,82 € sur son Livret A en 2026.

Exercice 31 ▶ Avec une dérivée

Soit x un réel différent de 0 et 1. On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \qquad ; \qquad S_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

1. Exprimer comme un quotient la somme $S_n(x)$.
2. En déduire une expression de $S_n'(x)$.

1. La somme $S_n(x)$ est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique

de raison x. Ainsi :

$$\boldsymbol{S_n(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}}.$$

2 Si l'on dérive terme à terme $S_n(x)$, on obtient $S_n'(x)$. Dérivons alors l'expression trouvée à la question précédente en utilisant la formule de la dérivée d'un quotient afin de trouver une expression de $S_n'(x)$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

où $u(x) = x^{n+1}-1$, $u'(x) = (n+1)x^n$, $v(x) = x-1$ et $v'(x) = 1$.

$$S_n'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$$
$$\boldsymbol{S_n' = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}}.$$

Exercice 32

Trouver trois nombres tels que leur somme soit égale à 14 et leur produit à 64.

Supposons que ces 3 nombres soient 3 termes consécutifs d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q. Alors :

$$\begin{aligned} u_n \times u_{n+1} \times u_{n+2} = 64 &\iff q^n u_0 \times q^{n+1}u_0 \times q^{n+2}u_0 = 64 \\ &\iff q^{3n+3}u_0^3 = 64 \\ &\iff \left(q^{n+1}u_0\right)^3 = 4^3 \\ &\iff q^{n+1}u_0 = 4 \\ &\iff q^n u_0 = \frac{4}{q} \qquad (1) \end{aligned}$$

($q \neq 0$ car la suite n'est pas constante, donc n'est pas nulle)

De plus :

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} + u_{n+2} = 14 &\iff q^n u_0\left(1+q+q^2\right) = 14 \\ &\iff \frac{4}{q}\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right) = 14 \text{ d'après (1)} \\ &\iff 4\left(q^3-1\right) = 14q(q-1) \\ &\iff 4(q-1)(q^2+q+1) = 14q(q-1) \\ &\iff 4(q^2+q+1) = 14q \text{ car } q \neq 1 \text{(suite non constante)} \\ &\iff 2q^2-5q+2 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $3q^2-4q+3$ est :

$$\Delta = (-5)^2 - 4\times 2\times 2 = 9.$$

Il y a donc deux valeurs possibles pour q :

$$q_1 = \frac{5-\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$q_2 = \frac{5+\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Il suffit donc de prendre $u_0 = 1$. Ainsi, l'égalité (1) nous dit que $2^n = 2$, soit : $n = 1$. Dans ce cas, nos trois nombre sont :

$$u_1 = 2\ ;\ u_2 = 2^2 = 4\ ;\ u_3 = 2^3 = 8.$$

On a bien :

$$\begin{cases} 2\times 4\times 8 = 64 \\ 2+4+8 = 14 \end{cases}$$

Exercice 33 ▶ Algorithmique

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 0,5 et de raison 0,3.
Écrire un algorithme permettant de trouver le premier entier naturel n tel que $u_n \leqslant 10^{-10}$ après avoir déterminer cette valeur par le calcul.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0{,}5 \times (0{,}3)^n$.
Ainsi :
$$\begin{aligned} u_n \leqslant 10^{-10} &\iff 0{,}5\times(0{,}3)^n \leqslant 10^{-10} \\ &\iff 0{,}3^n \leqslant 2\times 10^{-10} \\ &\iff \mathrm{e}^{n\ln 0{,}3} \leqslant \mathrm{e}^{\ln\left(2\times 10^{-10}\right)} \\ &\iff n\ln 0{,}3 \leqslant \ln\left(2\times 10^{-10}\right) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln\left(2\times 10^{-10}\right)}{\ln 0{,}3} \\ &\iff n \geqslant 19. \end{aligned}$$

Algorithme 6: Premier rang pour que $u_n \leqslant 10^{-10}$

Entrées
$u \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
Traitement
$n \leftarrow 0$, $u \leftarrow 0{,}5$
Tant que $u > 0{,}0000000001$
  $n \leftarrow n+1$
  $u \leftarrow u \times 0{,}3$
Fin du Tant que
Sortie
`Afficher` n `(affichera « 19 »)`

Exercice 34 ▶ Algorithmique

On considère la suite de l'exercice précédent et on pose : $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que $s_n \geqslant 0{,}714\,28$ et écrire un algorithme qui permet de le retrouver.

D'après le cours, on a :
$$\begin{aligned} s_n &= u_0 \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \\ &= 0{,}5 \times \frac{0{,}3^{n+1}-1}{0{,}3-1} \\ &= \frac{5}{7}\left(1-0{,}3^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Ainsi :
$$\begin{aligned} s_n \geqslant 0{,}714\,28 &\iff \frac{5}{7}\left(1-0{,}3^{n+1}\right) \geqslant 0{,}714\,28 \\ &\iff 1-0{,}3^{n+1} \geqslant 0{,}714\,28 \times \frac{7}{5} \\ &\iff 1-0{,}3^{n+1} \geqslant 0{,}999\,992 \\ &\iff -0{,}3^{n+1} \geqslant -0{,}000\,008 \\ &\iff 0{,}3^{n+1} \leqslant 0{,}000\,008 \\ &\iff \mathrm{e}^{(n+1)\ln 0{,}3} \leqslant \mathrm{e}^{\ln(0{,}000\,008)} \\ &\iff (n+1)\ln 0{,}3 \leqslant \ln(0{,}000\,008) \\ &\iff n+1 \geqslant \frac{\ln(0{,}000\,008)}{\ln 0{,}3} \quad \text{car } \ln 0{,}3 < 0 \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}000\,008)}{\ln 0{,}3} - 1 \\ &\iff n \geqslant 9. \end{aligned}$$

Ainsi, $n = 9$ est le premier terme pour lequel $s_n \geqslant 0{,}71428$.

Un algorithme possible est :

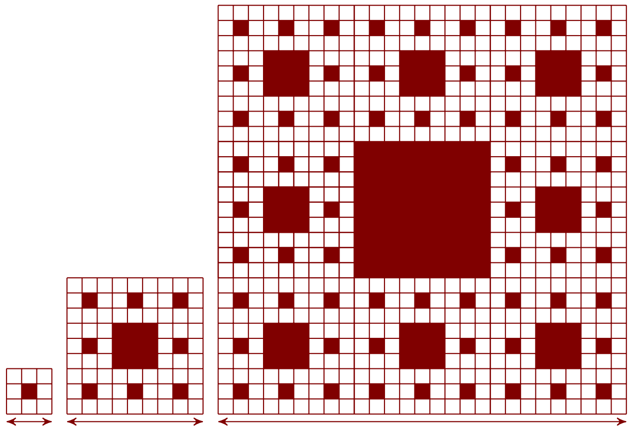
Algorithme 7: Premier rang pour que $s_n \geqslant 0{,}71428$

Entrées
  $u \in \mathbb{R}$
  $s \in \mathbb{R}$
  $n \in \mathbb{N}$
Traitement
  $n \leftarrow 0$
  $u \leftarrow 0{,}5$
  $s \leftarrow 0$
  Tant que $s < 0{,}71428$
    $s \leftarrow s + u$
    $u \leftarrow u \times 0{,}3$
    $n \leftarrow n + 1$
  Fin du Tant que
Sortie
  `Afficher` n

Exercice 35 ▶ Le crible de Sierpinski

Un carré unité est divisé en 9 carrés identiques, le carré central étant colorié (étape 1). Chacun des 8 carrés restants est divisé selon le même principe (étape 2). Ainsi de suite...
À l'étape n, combien y aura-t-il de carrés pleins ?

Regardons les premières étapes :



Notons p_n le nombre de carrés pleins et v_n celui de carrés vides à l'étape n.

$$v_1 = 8 \quad ; \quad v_2 = v_1 \times 8 \quad ; \quad v_3 = v_2 \times 8 \quad \ldots$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 8. Donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\, v_n = 8^n.$$

À chaque étape, chaque carré vide engendre un carré plein. Donc :

$$p_{n+1} = p_n + v_n\ ,$$

ce qui signifie que :

$$p_{n+1} - p_n = v_n = 8^n.$$

Par somme, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (p_{k+1} - p_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} 8^k \\
p_n - p_1 &= 8\left(1 + 8 + 8^2 + \cdots + 8^{n-2}\right) \\
p_n - 1 &= 8 \times \frac{8^{n-1} - 1}{8 - 1} \\
p_n &= \frac{8}{7}\left(8^{n-1} - 1\right) + 1 \\
\boldsymbol{p_n} &= \boldsymbol{\frac{1}{7}\left(8^n - 1\right)}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 36 ▶ Le paradoxe d'Achille et la tortue

Achille et une tortue font la course. Pour ne pas désavantager la tortue, Achille lui laisse cent mètres d'avance avant de commencer sa course.
On note a_n la position d'Achille et t_n celle de la tortue à l'instant n, n étant exprimé en secondes. Ainsi, $a_0 = 0$ et $t_0 = 100$.
Pour $n \geqslant 1$, on note T_n le temps (en secondes) mis par Achille pour que $a_n = t_{n-1}$ et on admet que $T_{n+1} = 0{,}01 T_n$, avec $T_1 = 10$.
À quel moment Achille rejoindra la tortue ?

Ce problème fait partie des « paradoxes de Zénon d'Élée ». On doit ici calculer la somme infinie :

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n + \cdots$$

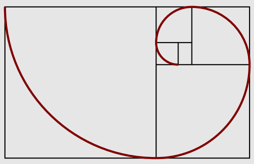
sachant que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison 0,01 et de premier terme $T_1 = 10$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} T_n &= \lim_{n\to+\infty}\left[10\left(\frac{1-0{,}01^n}{1-0{,}01}\right)\right]\\ &= \frac{10}{0{,}99}\\ &= \frac{1\,000}{99}.\end{aligned}$$

Il faudra donc à Achille environ 10 secondes et un dixième pour rattraper la tortue.

Exercice 37 ▶ La spirale d'or

La spirale d'or est construite à partir du rectangle d'or, c'est-à-dire du rectangle de largeur 1 et de longueur φ (le nombre d'or). À l'intérieur, on construit une succession de carrés de côtés 1, φ^{-1}, φ^{-2}, φ^{-3}, ... La spirale d'or (en rouge) est obtenue par adjonction des quarts de cercle inscrits dans les carrés.



Quelle est la longueur totale de cette spirale ?

Par construction, chaque quart de cercle a un rayon égal à $r_n = \varphi^{-n}$.
Ainsi, la longueur totale de la spirale est :

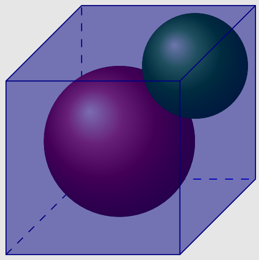
$$\mathscr{L} = \frac{\pi}{2}\sum_{n\geqslant 0}\varphi^{-n}$$

Ceci est la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison φ ; ainsi, on a :

$$\mathscr{L} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-\varphi^{-1}} = \boxed{\frac{\pi}{2}\varphi^2}$$

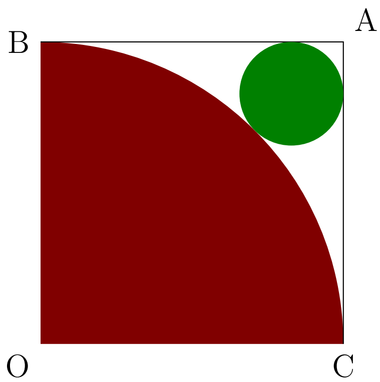
Exercice 38 ► La plus grande sphère

Dans un cube d'arête 2, on place une sphère (rouge) de rayon 1. On cherche alors à insérer une sphère (bleue) de rayon maximal dans un des coins du cube.



Quel est le rayon maximum que cette sphère peut avoir ?

Faisons une coupe transversale :



Considérons l'homothétie $\mathscr{H}$ de centre A qui transforme la première sphère (rouge), notée $\mathscr{S}_0$, en la seconde (vertes), notée $\mathscr{S}_1$.
Alors, l'image de $\mathscr{S}_1$ par $\mathscr{H}$ sera une sphère tangente à $\mathscr{S}_1$ et aux parois du cube. on peut ainsi construite une suite de sphères de rayon r_n de sorte que $r_n = k^n r_0 = k^n$, où k est le rapport de $\mathscr{H}$.
En théorie, on a :

$$r_0 + 2r_1 + 2r_2 + \cdots = \text{OA} \ ,$$

d'où :

$$\begin{aligned} 2(r_0 + r_1 + r_2 + \cdots) - r_0 = \text{OA} &\iff \frac{2}{1-k} - 1 = \sqrt{2} \\ &\iff \frac{2}{k-1} = 1 + \sqrt{2} \\ &\iff k - 1 = \frac{2}{1+\sqrt{2}} \\ &\iff k = 3 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, le rayon maximal de la sphère bleue est égal à $\mathbf{3 - 2\sqrt{2}}$.

Exercice 39 ▶ Quand 0,99999... = 1

À l'aide d'une suite géométrique judicieusement choisie, montrer que $0{,}999\ldots = 1$.
Généraliser à tout nombre x s'écrivant : $x = a{,}b_1b_2\cdots b_pb_1b_2\cdots b_p\cdots$.
En déduire une écriture fractionnaire du nombre $3{,}141414\ldots$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
0{,}999\ldots &= 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots \\
&= \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^n} \\
&= \frac{9}{10} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\
&= \frac{9}{10} \times \frac{1}{\frac{9}{10}} \\
&= \frac{9}{10} \times \frac{10}{9} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}
x &= a{,}b_1b_2\cdots b_pb_1b_2\cdots b_p\cdots \\
&= a + b_1b_2\cdots b_p\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10^p}\right)^n \\
&= a + \frac{b_1b_2\cdots b_p}{10^p}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10^p}\right)^n \\
&= a + \frac{b_1b_2\cdots b_p}{10^p} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10^p}} \\
&= a + \frac{b_1b_2\cdots b_p}{10^p - 1}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

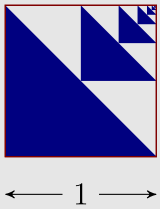
$$\boxed{x = \frac{a\left(10^p - 1\right) + b_1b_2\cdots b_p}{10^p - 1}}$$

On a alors :

$$3{,}141414\cdots = \frac{3\left(10^2-1\right)+14}{10^2-1}$$

$$\boldsymbol{3{,}141414\cdots = \frac{311}{99}}$$

Exercice 40 ▶ Mise en abîme



Sachant qu'il y a une infinité de triangles bleus, calculer l'aire de la surface totale qu'ils occupent.

Le premier triangle (le plus grand) a pour côté 1 ; son aire est donc égale à $\frac{1}{2}$.

Le second triangle a pour côté $\frac{1}{2}$; son aire est donc égale à $\frac{1}{8}$.

Le troisième triangle a pour côté $\frac{1}{4}$; son aire est donc égale à $\frac{1}{32}$.

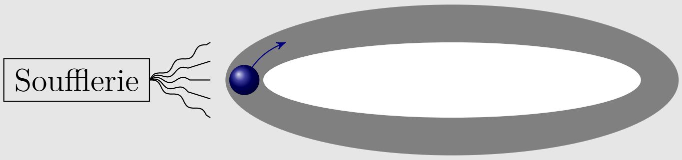
La surface totale $\mathscr{S}$ est donc la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique (celle de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{4}$). D'où :

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{3}{4}}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

La surface totale est donc égale à $\mathbf{\frac{2}{3}}$.

Exercice 41 ▶ En probabilités

Une bille se trouve sur un circuit ovale au-dessus duquel se trouve une soufflerie. La bille tourne *ad vitam aeternam* si la soufflerie est en position « souffle ». Par contre, si elle se trouve en position « aspire », la bille perd son énergie cinétique et s'immobilise quand elle passe devant.
Les deux positions « souffle » et « aspire » sont déclenchées de façon aléatoire avant chaque passage de la bille devant la soufflerie, et ont la même probabilité d'être obtenue.



Avec quelle probabilité la bille tournera *ad vitam aeternam* ?

Posons N le nombre de tours que la bille fera.

$P(N=1)=\frac{1}{2}$ car il y a une chance sur deux pour que la soufflerie soit en position

« aspire » ;
$P(N=2)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ car il y a une chance sur deux que la soufflerie soit en position « souffle » lors du premier passage et en position « aspire » lors du second.

On l'aura alors compris, $P(N=k)=\frac{1}{2^k}$.
La loi de probabilité de N est alors :

$\boldsymbol{k}$	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
$\boldsymbol{P(N=k)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^n}$	$\cdots$

On vérifie que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{2^k}&=\frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{2^k}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2}\times 2\\&=1.\end{aligned}$$

L'espérance mathématique que N est :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N)&=\sum_{k\geqslant 1}k\times\frac{1}{2^k}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}k\times\frac{1}{2^{k-1}}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}\qquad\text{(voir exercice 31)}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{4}}\\\mathbb{E}(N)&=2.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre moyen de tours est égal à 2.

N.B. J'ai ici utilisé le résultat de l'exercice 31 qui disait :

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

et l'ai appliqué à $x=\frac{1}{2}$ pour calculer l'espérance de N.

Exercice 42 ▶ Le paradoxe de Saint-Petersbourg

Considérons le jeu suivant : on lance en l'air une pièce de monnaie. Si « face » apparaît, la banque paie 2 € au joueur, et on arrête le jeu. Sinon, on relance la pièce. Si « face » apparaît, la banque paie 4 €, et on arrête le jeu. Sinon, on relance la pièce. Si « face »

apparaît, la banque paie 8 € au joueur, et ainsi de suite. Donc, si « face » apparaît pour la première fois au n^{e} lancer, la banque paie $2n$ € au joueur.
On cherche la mise initiale pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que ni la banque ni le joueur ne soient avantagés par ce jeu.

Ce paradoxe a été proposé par Nicolas Bernoulli dans une lettre datée de septembre 1713. Il a été repris et modifié par Daniel Bernoulli, son neveu, et discuté dans les *Transactions de l'Académie de Saint-Petersbourg.*

Notons G la variable aléatoire correspondant au gain du joueur. La loi de probabilité de G est la suivante :

k	2 €	4 €	8 €	$\cdots$
$P\left(G=2^k\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\cdots$

Ainsi, l'espérance mathématique de G est :

$$\mathbb{E}(G)=\sum_{k\geqslant 1} 2^k \times \frac{1}{2^k}=+\infty.$$

Il faudrait donc une mise de départ infinie pour que le jeu soit équitable.
Ce paradoxe vient du fait que l'on suppose que la banque peut verser n'importe quelle somme, ce qui est absurde puisque toute caisse est limitée.
Pour que le problème soit cohérent, il faudrait fixer un plafond à la caisse de la banque à chaque coup ; fixons-le par exemple à 1 000 000 €.

La banque paie 2^n € si « face » apparaît au n^{e} lancer et si $2^n<1\,000\,000$; si $2^n>1\,000\,000$, alors elle paie 1 000 000 €.
La plus petite valeur de n telle que $2^n>1\,000\,000$ est $n=20$. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(G)=19+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=20}^{n}\frac{1\,000\,000}{2^n}\approx 21{,}9$$

Dans ces conditions, la mise de départ doit être de 21,9 € pour que le jeu soit équitable.

Exercice 43 ▶ Sujet de baccalauréat, Antilles 2004

On définit les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ par $a_0=1$, $b_0=7$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2a_n+b_n\right)\\ b_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(a_n+2b_n\right)\end{cases}$$

Soit $\mathscr{D}$ une droite munie d'un repère $\left(O;\vec{i}\right)$. Pour tout entier naturel n, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=b_n-a_n$.

Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimer u_n en fonction de n.

3 Comparer a_n et b_n. Étudier le sens de variation des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ puis interpréter géométriquement ces résultats.

4 Démontrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

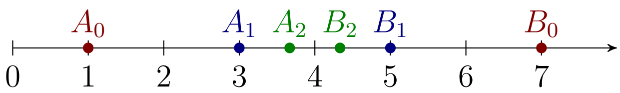
5 Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n + b_n$.
Démontrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est constante puis en déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.

6 Justifier que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes et calculer leur limite. Interpréter géométriquement ce résultat.

1 Calculons l'abscisse des points :

$a_1 = \frac{1}{3}(2+7)$	$b_1 = \frac{1}{3}(1+14)$	$a_2 = \frac{1}{3}(6+5)$	$b_2 = \frac{1}{3}(3+10)$
$a_1 = 3$	$b_1 = 5$	$a_2 = \frac{11}{3}$	$b_2 = \frac{13}{3}$

D'où le graphique suivant :



2 $u_n = b_n - a_n$ donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n - \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{3}b_n \\ &= -\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ &= \frac{1}{3}(b_n - a_n) \\ &= \frac{1}{3}u_n \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = b_0 - a_0 = 7 - 1 = 6$.

Donc, pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{u_n = \dfrac{6}{3^n}}$.

3 D'après ce qui précède, $u_n > 0$ donc $b_n > a_n$ pour tout entier naturel n.

De plus,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n - a_n \\ &= \frac{1}{3}(b_n - a_n) \\ &= \frac{1}{3}u_n \\ &> 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.
De la même façon, on montre que $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante.
Cela signifie que les points A_i se construisent de gauche à droite alors que les B_i se construisent de droite à gauche.

4 Nous venons de voir que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
De plus, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n) &= \lim_{n\to+\infty} u_n\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{6}{3^n}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

5 On a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= a_{n+1}+b_{n+1}\\ &= \frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n\\ &= a_n+b_n\\ &= v_n.\end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est constante.

On en déduit alors que pour tout entier naturel n, $\dfrac{a_n+b_n}{2}$ est un nombre constant.
Or, ce nombre correspond à l'abscisse du milieu de $[A_nB_n]$. Par conséquent, les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu.

6 $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes donc elles convergent vers une limite commune, que l'on va noter ℓ.
Nous avons vu que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ était constante donc $v_n = a_0+b_0 = 8$.
Or, en prenant l'expression « $v_n = a_n + b_n$ » à la limite, on obtient $2\ell = 8$, soit $\ell = 4$.
Ainsi, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers le nombre 4.
Géométriquement, cela signifie que les points A_i et B_i vont se rapprocher du point I d'abscisse 4.

Exercice 44 ▶ Arbre généalogique

On note u_n le nombre d'ancêtres d'une personne à la n-ième génération (en supposant qu'aucun membre de la famille se marie avec un autre). Ainsi, $u_1 = 2$ représente le nombre de parents de cette personne.

1 Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.

2 Déterminer u_{100}.

3 Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 7\,000\,000\,000$.

4 Sachant que la population mondiale comptait près de 7 milliards d'individus en 2011,

déterminer en quelle année un individu pourra prétendre avoir pour ancêtres toute la population mondiale de 2011 (on supposera qu'une génération compte pour 25 ans).
Cette dernière affirmation est-elle cohérente à vos yeux ? Justifier.

1. Chaque individu a 2 parents ; donc, si, à la n^e génération, il y a u_n individus, à la génération suivante, il y en aura $2u_n$.
   Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.
2. On sait que $u_n = u_0 q^n$, soit $u_n = 2^n$. Ainsi, $u_{100} = 2^{100}$.
3. $$\begin{aligned} u_n \geqslant 7\,000\,000\,000 &\iff 2^n \geqslant 7\,000\,000\,000 \\ &\iff \ln\left(2^n\right) \geqslant \ln(7\,000\,000\,000) \\ &\iff n\ln(2) \geqslant \ln(7\,000\,000\,000) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(7\,000\,000\,000)}{\ln(2)} \\ &\iff n \geqslant 33. \end{aligned}$$
4. D'après la question précédente, il faut 33 générations, soit 825 années, pour avoir 7 milliards d'ancêtres.
   Donc, en 2836, un individu pourra prétendre (sous les hypothèses de l'énoncé) avoir comme ancêtres toute la population mondiale de la Terre de 2011.

   Bien entendu, les conditions de l'énoncé sont erronées ; en effet, il arrive une génération où les aïeuls sont si nombreux qu'ils ne savent pas qu'ils sont de la même famille. Ainsi, deux personnes de la même famille peuvent s'unir et procréer...
   Dans ce cas, à la génération n, le nombre d'ancêtres est inférieur à u_n.

Exercice 45 ▶ Intensité lumineuse

Un fabricant de vitres teintées souhaite confectionner une vitre qui laisserait passer 75 % de la lumière dans un sens.
On note I_0 l'intensité lumineuse avant de traverser cette vitre teintée, et I_1 l'intensité de la lumière après avoir traversé cette vitre.

1. Exprimer I_1 en fonction de I_0.

Le fabricant met n vitres teintées à la suite. On note I_n l'intensité lumineuse après avoir traversé n vitres.

2. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}, puis en fonction de I_0 et n.
3. À l'aide d'un tableur, ou par calculs, trouver le plus petit nombre de vitres teintées pour que l'intensité lumineuse soit, après le passage de la n-ième vitre, diminuée de 95 %.

1. $I_1 = 0{,}75 I_0$.
2. $I_n = 0{,}75 I_{n-1}$. Le raisonnement est le même que dans la réponse à la question précédente.

On sait alors que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique, de premier terme I_0 et de raison 0,75. Ainsi :

$$I_n = I_0 \times (0{,}75)^n.$$

3 Afin de trouver le plus petit nombre de vitres teintées pour que l'intensité lumineuse soit, après le passage de la n-ième vitre, diminuée de 95 %, on effectue un travail mathématique au préalable :
Nous devons trouver le plus petit n tel que :

$$\begin{aligned} I_n \leqslant 0{,}05 I_0 &\iff I_0 \times (0{,}75)^n \leqslant 0{,}05 \\ &\iff (0{,}75)^n \leqslant 0{,}05. \end{aligned}$$

Ici, si nous avons la connaissance des logarithmes, nous pouvons continuer :

$$\begin{aligned} (0{,}75)^n \leqslant 0{,}05 &\iff \ln(0{,}75)^n \leqslant \ln(0{,}05) \\ &\iff n\ln(0{,}75) \leqslant \ln(0{,}05) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}75)} \\ &\iff n \geqslant 10{,}4. \end{aligned}$$

Ainsi, il faut au minimum 11 vitres teintées pour que l'intensité lumineuse soit diminuée de 95 %.

Sans connaissance du logarithme, à l'aide d'un tableur, on entre dans une première colonne `A` les entiers naturels n, allant de 0 à 20 (par exemple), puis dans la colonne suivante `B`, 1re cellule (en face du « 0 »), on entre la formule :

```
=0.75^A1-0.05
```

que l'on copie jusqu'à la fin ($n = 20$). La valeur de n qui correspond à notre recherche est la première valeur de n telle que le contenu de la 2e cellule soit négatif. On a le tableau suivant :

n	I_n
0	0,95
1	0,7
2	0,5125
3	0,371875
4	0,26640625
5	0,1873046875
6	0,1279785156
7	0,0834838867
8	0,050112915
9	0,0250846863
10	0,0063135147
11	-0,007764864

On arrive, fort heureusement, au même résultat : le plus petit nombre de vitres est 11.

Suites arithmético-géométriques

6

Les suites que nous allons voir dans ce chapitre sont un mélange des suites arithmétiques et géométriques, d'où leur appellation.
Elle interviennent dans bien plus de domaines qu'on ne le pense...

Définition 14 ▶ Suites arithmético-géométriques

Une suite arithmético-géométrique est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\exists\,(a,b) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^* \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Exemple 9

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{cases}$$

est arithmético-géométrique.

Considérons une suite arithmético-géométrique telle que définie plus haut. Alors :

- $u_1 = au_0 + b$
- $u_2 = au_1 + b = a(au_0 + b) + b = a^2u_0 + b(1 + a)$
- $u_3 = au_2 + b = a(a^2u_0 + b(1 + a)) + b = a^3u_0 + b(1 + a + a^2)$

  $\vdots$

Nous pouvons alors conjecturer le résultat suivant.

Proposition 18 ▶ Terme général

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b, \qquad a \neq 0,\ a \neq 1,\ b \neq 0.$$

Alors :

$$u_n = a^n u_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} b.$$

Démontrons cela par récurrence sur n :

- **Initialisation.**
  Pour $n = 0$, on a : $a^0u_0 + \frac{a^0-1}{a-1}b = u_0$.
  L'initialisation est alors réalisée.

- **Hérédité.**
Supposons que la formule est vraie à un certain rang n. Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= au_n + b \\
&= a\left(a^n u_0 + \frac{a^n - 1}{a-1}b\right) + b \text{ par hypothèse de récurrence)} \\
&= a^{n+1}u_0 + \frac{a\left(a^n - 1\right)}{a-1}b + b \\
&= a^{n+1}u_0 + \frac{\left(a^{n+1} - a\right)b + b(a-1)}{a-1} \\
&= a^{n+1}u_0 + \frac{a^{n+1} - a + a - 1}{a-1}b \\
&= a^{n+1}u_0 + \frac{a^{n+1} - 1}{a-1}b.
\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée. Donc la formule est vraie pour tout entier naturel n. ■

Exercice 46 ▶ Le crible de Sierpinski - le retour

Un carré unité est divisé en 9 carrés identiques, le carré central étant colorié (étape 1). Chacun des 8 carrés restants est divisé selon le même principe (étape 2). Ainsi de suite...
À l'étape n, quelle sera l'aire totale de la surface coloriée ?

Notons a_n l'aire totale de la surface coloriée à l'étape n. On a alors :

$$a_1 = \frac{1}{9} \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{9}\left(1 - a_n\right).$$

En effet, à chaque étape, $\frac{1}{9}$ de la surface vide est coloriée et l'aire de la surface vide est égale à $1 - a_n$ à l'étape n car la somme de l'aire des surfaces vides et colorées est égale à l'aire du carré unité, donc à 1.

On a alors :

$$a_{n+1} = \frac{8}{9}a_n + \frac{1}{9}.$$

La suite est donc arithmético-géométrique et d'après le proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} \times \frac{1}{9} + \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} - 1}{\frac{8}{9} - 1} \times \frac{1}{9} \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} + 1 \\
\boldsymbol{a_n} &\boldsymbol{= 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons prendre la formule de la proposition 18 et l'écrire différemment :

$$u_n = a^n\left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}.$$

Cette écriture nous permet d'émettre la proposition suivante.

Proposition 19 ▶ Convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b, \qquad a \neq 0,\ a \neq 1,\ b \neq 0.$$

Alors, quelle que soit la valeur de u_0, elle converge vers $\dfrac{b}{1-a}$ si et seulement si $|a| < 1$.

En effet,

- Si $|a| < 1$, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0.$$
On en déduit alors :
$$\lim_{n\to+\infty} a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) = 0.$$
Donc, d'après l'écriture précédente de u_n :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{b}{a-1} = \frac{b}{1-a}.$$
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{b}{1-a}$, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1} = \frac{b}{1-a}\ ,$$
d'où :
$$\lim_{n\to+\infty} a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) = 0.$$
Or, u_0 peut prendre n'importe quelle valeur donc $u_0 + \dfrac{b}{a-1} \neq 0$.
Par conséquent :
$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0\ ,$$
ce qui implique que $|a| < 1$.

Ce qui démontre bien la proposition. ■

Exercice 47 ▶ Les cabris

Dans une réserve, on a constaté une diminution annuelle constante de 10% de l'effectif des cabris.
Pour sauvegarder l'espèce, on décide d'introduire chaque année un nombre fixe K de ces cabris.
Étudier en fonction de K la limite de l'effectif de cabris dans cette réserve.

Notons u_n le nombre de cabris de cette réserve à l'année n. On a alors :

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + K.$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique et sa limite vaut :

$$\ell = \frac{K}{1-0{,}9} = 10K.$$

Penchons-nous maintenant sur la somme des premiers termes d'une suite arithmético-géométrique.

Proposition 20 ▶ Somme des premiers termes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = au_n + b, \qquad a \neq 0,\, a \neq 1,\, b \neq 0.$$

Alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)\frac{a^{n+1}-1}{a-1} - \frac{b}{a-1}(n+1).$$

D'après la proposition 18 de ce chapitre, on a :

$$u_n = a^n u_0 + \frac{a^n - 1}{a-1}b\,,$$

d'où, par somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= u_0 \sum_{k=0}^{n} a^k + b\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k-1}{a-1}\\
&= u_0 \sum_{k=0}^{n} a^k + \frac{b}{a-1}\sum_{k=0}^{n}\left(a^k - 1\right)\\
&= u_0 \sum_{k=0}^{n} a^k + \frac{b}{a-1}\left(\sum_{k=1}^{n} a^k - (n+1)\right)\\
&= \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)\sum_{k=0}^{n} a^k - \frac{b}{a-1}(n+1)\\
&= \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)\frac{a^{n+1}-1}{a-1} - \frac{b}{a-1}(n+1).
\end{aligned}$$

■

Il est assez courant en France de voir des exercices de niveau terminale faisant intervenir des suites arithmético-géométriques sans que cette notion intervienne dans les programmes officiels. C'est parce que de telles suites peuvent être étudiées en passant par les suites géométriques. Nous allons voir comment faire dans l'exercice suivant :

Exercice 48 ▶ Se ramener à une suite géométrique

On considère la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = au_n + b \qquad a \neq 0,\, a \neq 1,\, b \neq 0.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + \lambda$.
Donner, en fonction de a et b, la valeur de λ pour que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique. Donner alors sa raison.

Nous souhaitons que :

$$v_{n+1} = qv_n.$$

Or :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \lambda \\ &= au_n + b + \lambda \\ &= a\left(u_n + \frac{b+\lambda}{a}\right). \end{aligned}$$

Il faut donc que :

$$\begin{aligned} \frac{b+\lambda}{a} = \lambda &\iff b + \lambda = a\lambda \\ &\iff b = \lambda(a-1) \\ &\iff \boldsymbol{\lambda = \frac{b}{a-1}}. \end{aligned}$$

La raison de la suite géométrique sera alors a.

Voici donc un moyen simple, pour un(e) enseignant(e), de construire n'importe quelle suite géométrique liée à une suite arithmético-géométrique quelconque.

Exemple 10 ▶ Construction d'une suite géométrique

On considère la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3}.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n &= u_n + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}-1} \\ v_n &= u_n - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

sera nécessairement géométrique et convergera vers 0 puisque sa raison vaut $\frac{1}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(v_n + \frac{1}{3}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (v_n) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 49 ▶ Bac. 2012, Série ES (Spécialité), Amérique du Nord - Extrait

Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnements : l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives et l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au sauna, au hammam et au jacuzzi. Chaque adhérent doit choisir un des deux abonnements.

La première année, en 2010, 80 % des clients ont choisi l'abonnement de type A. On considère ensuite que 30 % des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement pour l'année suivante, tandis que 10 % des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement pour l'année suivante.
Soit n un entier supérieur ou égal à 0.
On note a_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type A l'année $2010+n$.
On note b_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type B l'année $2010+n$.

1. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 0, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}1$.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, on pose $u_n = 4a_n - 1$.
   Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,6. Préciser son premier terme.
3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, exprimer u_n en fonction de n. En déduire a_n en fonction de n.
4. Calculer la limite de la suite (a_n) puis interpréter concrètement ce résultat.

1. On a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0{,}7a_n + 0{,}1b_n \\ &= 0{,}7a_n + 0{,}1(1-a_n) \\ &= 0{,}7a_n + 0{,}1 - 0{,}1a_n \\ &= \underline{0{,}6a_n + 0{,}1}. \end{aligned}$$

2. $u_n = 4a_n - 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 4a_{n+1} - 1 \\ &= 4(0{,}6a_n + 0{,}1) - 1 \\ &= 2{,}4a_n + 0{,}4 - 1 \\ &= 2{,}4a_n - 0{,}6 \\ &= 0{,}6(4a_n - 1) \\ &= 0{,}6u_n. \end{aligned}$$

   Ainsi, la suite (u_n) est géométrique de raison 0,6. et de premier terme $u_0 = 4a_0 - 1 = 2{,}2$.

3. La suite étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 \times q^n \\ u_n &= 2{,}2 \times (0{,}6)^n. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n = 4a_n - 1 &\iff 2{,}2 \times (0{,}6)^n = 4a_n - 1 \\ &\iff 2{,}2 \times (0{,}6)^n + 1 = a_n \\ &\iff \boxed{a_n = \frac{2{,}2 \times (0{,}6)^n + 1}{4}} \end{aligned}$$

4 On sait que $0 < 0{,}6 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}6^n) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}25}$.

Cela signifie qu'à long terme, il y aura un quart d'adhérents qui auront choisi la formule A.

Exercice 50 ▶ Bac. 2012, Série ES (Spécialité), Liban - Extrait

Cet exercice consiste à étudier la propagation d'une information d'une personne à l'autre, thème souvent abordé en sciences sociales. Cette information se transmet avec un risque d'erreur, c'est-à-dire avec une probabilité de propagation de l'information contraire.
Dans cet exercice, on considère l'information suivante, notée E : « Paul a réussi son examen ».
On suppose que, pour une information reçue (E ou $\overline{\text{E}}$), la probabilité de communiquer cette information à l'identique vaut 0,9 et la probabilité de relayer l'information contraire vaut 0,1.
On note p_n la probabilité de recevoir l'information E au bout de n étapes (n étant le nombre de personnes ayant transmis l'information) et on note q_n la probabilité de recevoir l'information $\overline{\text{E}}$ au bout de n étapes.
On suppose que Paul a réussi son examen, on pose $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.
Déterminer une expression de p_n en fonction de n puis calculer sa limite.

Cet exercice est inspiré d'un baccalauréat mais j'ai changé les questions (pour n'en mettre qu'une) et j'ai enlevé une autre partie qui ne faisait pas intervenir les suites arithmético-géométriques.

On a, d'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} &= 0{,}9p_n + 0{,}1q_n \\ &= 0{,}9p_n + 0{,}1(1 - p_n) \text{car } p_n + q_n = 1 \text{(ce sont des probabilités)} \\ &= 0{,}8p_n + 0{,}1. \end{aligned}$$

D'après la proposition 18 de ce chapitre, on a alors :

$$\begin{aligned} p_n &= 0{,}8^n + \frac{1 - 0{,}8^n}{1 - 0{,}8} \times 0{,}1 \\ &= 0{,}8^n + \frac{1}{2}(1 - 0{,}8^n) \\ &= \frac{1}{2} \times 0{,}8^n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi :
$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}.$$
Cela signifie qu'à longs termes, la rumeur a une chance sur deux de circuler correctement.

Exercice 51 ▶ Bac. 2011, Série ES (Spécialité), Amérique du Sud - Extrait

Franck Geek est adepte de jeux vidéo en ligne. Afin de préserver son temps de travail scolaire, il essaye de se modérer. Il constate que :

- s'il a joué un jour, la probabilité qu'il ne le fasse pas le lendemain est de 0,6 ;
- s'il n'a pas joué un jour, la probabilité qu'il joue le lendemain est de 0,9.

Le jour de la rentrée (premier jour), Franck a décidé de ne pas jouer. On note d_n la probabilité pour que Franck ait joué le n-ième jour.
Exprimer d_n en fonction de n et déterminer sa limite.

D'après l'énoncé :
$$\begin{aligned} d_{n+1} &= 0{,}4d_n + 0{,}9(1-d_n) \\ &= 0{,}4d_n + 0{,}9 - 0{,}9d_n \\ &= -0{,}5d_n + 0{,}9. \end{aligned}$$
En posant :
$$v_n = d_n + \frac{0{,}9}{-0{,}5-1} = d_n - \frac{3}{5}\ ,$$
on montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et convergente vers 0, donc :
$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \frac{3}{5}.$$

Exercice 52 ▶ Dondon le hérisson

Dondon est un hérisson qui se trouve sur une route à contre-courant d'air. Pour avancer, toutes les dix secondes, il fait un bond en avant d'un mètre mais tant que le courant d'air existe, il recule à chaque fois de 5 % du trajet total effectué depuis son départ.
Tant que le courant d'air persiste, à quelle distante maximale peut-il espérer aller ?

Notons u_n la distance à laquelle Dondon se trouvera au bout de $10n$ secondes. On a alors :
$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 0{,}95(u_n+1) = 0{,}95u_n + 0{,}95.$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique et sa limite vaut :
$$\ell = \frac{0{,}95}{1-0{,}95} = \frac{0{,}95}{0{,}05} = 19.$$
Ainsi, Dondon ne pourra pas espérer dépasser les 19 mètres par rapport à sa position de départ.

Exercice 53 ▶ Le shampooing à l'eau

Dans la famille RAPIASSE, pour économiser le shampooing, on remplit le flacon d'eau après que tous les membres de la famille ont pris leur douche. Le flacon contient à l'origine un litre de shampooing. Chaque jour, un quart du contenu est utilisé.

Exprimer, en millilitres, la quantité d'eau présente dans le flacon au bout de n jours.
Déterminer à partir de combien de jours la quantité d'eau sera supérieure ou égale à 900 ml.

Notons u_n la quantité d'eau dans le flacon le n-ième jour après que tous les membres de la famille se soient douchés.

Le 1^er^ jour, il reste 750 ml de shampooing et donc, la famille verse 250 ml d'eau pour remplir le flacon.
Donc $u_1 = 250$.

Le 2^e^ jour, la famille utilise 250 ml du contenu ; il reste donc trois quarts du contenu précédent d'eau, auxquels viennent s'ajouter 250 ml : Donc :

$$u_2 = \frac{3}{4} \times 250 + 250.$$

On comprend alors le principe :

$$u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + 250.$$

Nous avons alors une suite arithmético-géométrique donc :

$$\begin{aligned} u_n &= 0{,}75^{n-1} \times u_1 + \frac{1 - 0{,}75^{n-1}}{1 - 0{,}75} \times 250 \\ &= 0{,}75^{n-1} \times 250 + 1\,000\left(1 - 0{,}75^{n-1}\right) \\ \boldsymbol{u_n} &\boldsymbol{= 1\,000 - 750 \times 0{,}75^{n-1}}. \end{aligned}$$

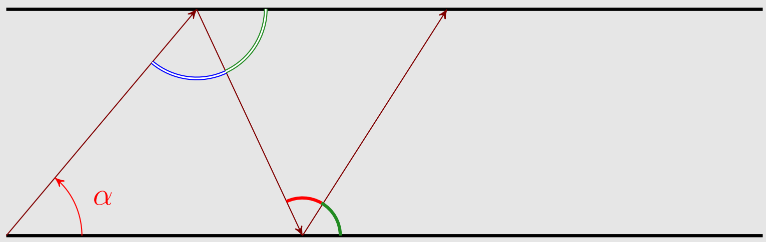
La quantité d'eau sera supérieure à 900 ml quand :

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 900 &\iff 1\,000 - 750 \times 0{,}75^{n-1} \geqslant 900 \\ &\iff 750 \times 0{,}75^{n-1} \leqslant 100 \\ &\iff 0{,}75^{n-1} \leqslant \frac{100}{750} \\ &\iff \mathrm{e}^{(n-1)\ln 0{,}75} \leqslant \mathrm{e}^{\ln \frac{2}{15}} \\ &\iff (n-1)\ln 0{,}75 \leqslant \ln \frac{2}{15} \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln \frac{2}{15}}{\ln 0{,}75} + 1 \\ &\iff n \geqslant 9. \end{aligned}$$

Ainsi, en neuf jours, la concentration d'eau dans le flacon atteindra 90 %.

Exercice 54 ▶ Comme une boule de billard

Dans un couloir, on lance une particule suivant un angle α avec l'horizontale. Elle rebondit sur la paroi opposée en formant un angle égal à la moitié de l'angle restant et ainsi de suite comme l'illustre le schéma suivant :



Montrer que l'angle formé par la trajectoire tend vers une constante que l'on déterminera.

Notons α_n l'angle formé à l'étape n, avec $\alpha_0 = \alpha$.
On a :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(180 - \alpha_0) = 90 - \frac{\alpha_0}{2} \ ,$$

et par suite :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = 90 - \frac{1}{2}\alpha_n.$$

Nous avons alors une suite arithmético-géométrique et sa limite vaut :

$$\ell = \frac{90}{1 + \frac{1}{2}}$$
$$\ell = 60.$$

Ainsi, l'angle limite vaut 60 degrés.

Exercice 55 ▶ Chloé l'araignée et ses 3 sommets

Chloé est une araignée qui se déplace le long d'un objet triangulaire composé de 3 arêtes. Les sommets sont nommés A, B et C. Á l'instant $n = 0$, elle se trouve en A.
On note a_n, b_n et c_n les probabilités qu'elle se trouve respectivement aux sommets A, B et C (donc $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 1$).
Déterminer l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n et calculer leur limite.

À l'aide de la formule des probabilités totales, on établit l'égalité suivante :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = MX_n.$$

Ainsi, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison M et donc :

$$X_n = M^n X_0 \ ,$$

d'où, après quelques calculs matriciels :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n) \qquad ;\text{et} \qquad b_n = c_n = a_{n+1}.$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique. On obtient alors :

$$a_n = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$$

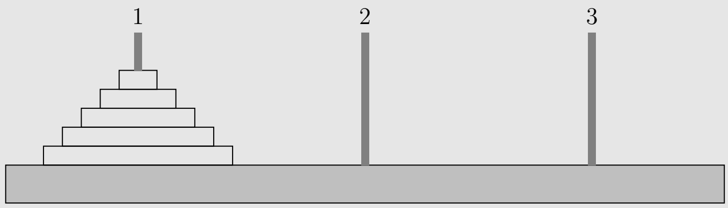
et

$$b_n = c_n = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\,,$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}.$$

Exercice 56 ▶ Les tours de Hanoï



Trois bâtons sont disposés comme l'illustre la figure. Sur le premier sont insérés n disques de diamètres 1, 2, 3, $\cdots$, n.
L'objectif est de déplacer la pyramide de disques du premier bâton au troisième avec les règles suivantes :

- À chaque coup, un disque seulement peut être déplacé ;
- Un disque ne peut pas être mis sur un autre disque de diamètre inférieur

Exprimer en fonction de n le nombre de coups nécessaires et suffisants pour terminer le jeu.

Nous allons poser u_n le nombre de coups nécessaires et suffisants correspondant à n disques.

Pour $n = 1$, il est clair que $u_1 = 1$. En effet, avec 1 disque, 1 déplacement suffit (du bâton 1 au bâton 3).

Pour $n = 2$, il est clair que $u_2 = 3$: on déplace le petit disque vers le bâton 2, puis le grand vers le 3 et enfin le petit vers le 3.

Pour $n = 3$, regardons toutes les étapes : pour simplifier, je vais symboliser la première tour par $\{3; 2; 1\}$. Alors :

Étape 0 :	$\{3;2;1\}$	$\{\varnothing\}$	$\{\varnothing\}$
Étape 1 :	$\{3;2\}$	$\{\varnothing\}$	$\{1\}$
Étape 2 :	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1\}$
Étape 3 :	$\{3\}$	$\{2;1\}$	$\{\varnothing\}$
Étape 4 :	$\{\varnothing\}$	$\{2;1\}$	$\{3\}$
Étape 5 :	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
Étape 6 :	$\{1\}$	$\{\varnothing\}$	$\{3;2\}$
Étape 7 :	$\{\varnothing\}$	$\{\varnothing\}$	$\{3;2;1\}$

Ainsi, $u_3 = 7$.

On voit alors se dessiner une stratégie qui consiste, lorsque l'on a n disques, à en déplacer $(n-1)$ sur le bâton 2 (ce qui nécessite u_{n-1} déplacements) puis à mettre le plus grand disque sur le bâton 3 (1 mouvement) et enfin mettre les autres disques sur le bâton 3 (u_{n-1} déplacements). D'où :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Nous avons alors une suite arithmético-géométrique et donc :

$$\boldsymbol{u_n = 2^n - 1.}$$

Exercice 57 ▶ Suites et probabilités

On dispose de deux pièces A et B :

- la pièce A est équilibrée ;
- la pièce B donne pile avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et face avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

On effectue une succession de lancers de la manière suivante :

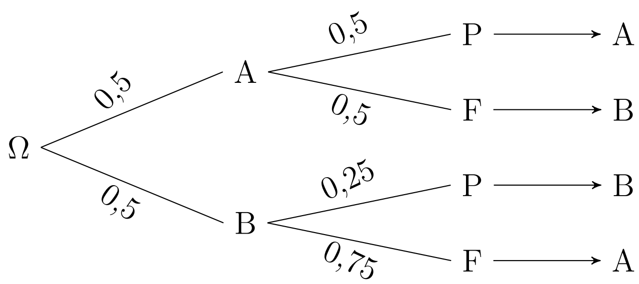
- en début de partie, on choisit au hasard une des deux pièces et on la lance ;
- à l'issue de chaque lancer, si on obtient pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

Pour tout entier naturel n non nul , on note :

- A_n l'événement : « Le n^{e} lancer s'effectue avec la pièce A » ;
- a_n la probabilité de l'événement A_n .

1. À l'aide d'un arbre pondéré, préciser les valeurs de a_1 et a_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $a_{n+1} = -\dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{3}{4}$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = a_n - \dfrac{3}{5}$.
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique.
   (b) En déduire l'expression de u_n puis celle de a_n en fonction de n .
4. En déduire la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Comment peut-on interpréter ce résultat ?

1. L'arbre pondéré correspondant à la situation est le suivant :



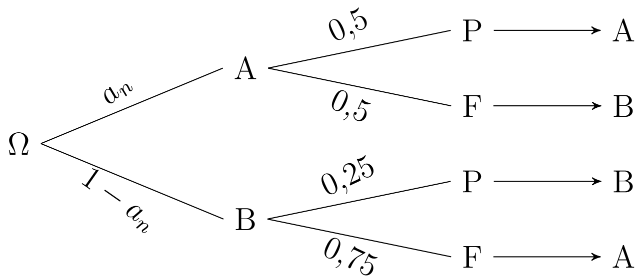
a_1 correspond à la probabilité pour que le 1er lancer se fasse avec la pièce A ; il y a autant de chance de choisir la pièce A que la pièce B. Par conséquent :

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{2}}.$$

Suivant les règles et l'arbre ci-dessus, d'après la formule des probabilités totales, on a ensuite :

$$\boldsymbol{a_2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \boldsymbol{= \frac{5}{8}}$$

2 On peut généraliser l'arbre précédent :



Ainsi, toujours d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}(1 - a_n) \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}a_n \\ \boldsymbol{a_{n+1}} &\boldsymbol{= -\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

3 (a) $\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{3}{5} \\ &= -\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4} - \frac{3}{5} \\ &= -\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{20} \\ &= -\frac{1}{4}\left(a_n - \frac{3}{5}\right) \\ &= -\frac{1}{4}u_n \end{aligned}$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$.

(b) On en déduit :

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 \times q^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{10} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

D'où :

$$a_n = u_n + \frac{3}{5}$$
$$\boldsymbol{a_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

4 On en déduit :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{3}{5}}$$

Cela signifie qu'à longs termes, on a 3 chances sur 5 d'effectuer un lancer avec la pièce A.

Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

7

Nous avons étudié dans les chapitres précédents les suites de la forme :

$$\begin{array}{ll} u_{n+1} = u_n + r & \text{suites arithmétiques} \\ u_{n+1} = qu_n & \text{suites géométriques} \\ u_{n+1} = au_n + b & \text{suites arithmético-géométriques} \end{array}$$

Elles ont toutes un point en commun : elles sont de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où :

$$\begin{array}{ll} f(x) = x + r & \text{suites arithmétiques} \\ f(x) = qx & \text{suites géométriques} \\ f(x) = ax + b & \text{suites arithmético-géométriques} \end{array}$$

Nous allons étudier dans ce chapitre ce type de suites pour une fonction f presque quelconque.

Proposition 21 ▶ Existence

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ existe si et seulement si :

$$\exists\, \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \mid \begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ f(\mathrm{I}) \subseteq \mathrm{I} \end{cases}$$

- **Supposons que $u_0 \in \mathrm{I}$ et que $f(\mathrm{I}) \subseteq \mathrm{I}$.**
  Alors, par récurrence sur n, on montre que $u_n \in \mathrm{I}$, quel que soit l'entier naturel n, et donc que $f(u_n)$ existe.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi bien définie.

- **Supposons que la suite soit bien définie.**
  Cela signifie que l'on peut calculer $f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Donc tous les u_n appartiennent à un intervalle où f est définie. ■

Proposition 22 ▶ Limite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie pour tout entier naturel n par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue sur un intervalle I$\subseteq \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \ell = f(\ell).$$

En effet, f est continue et la suite converge vers ℓ donc :

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}\\ &= \lim_{n\to+\infty} f(u_n)\\ &= f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) \text{ car } f \text{est continue}\\ &= f(\ell).\end{aligned}$$

■

N.B. Le nombre ℓ est appelé le point fixe de f.

Ainsi, si l'on sait qu'une telle suite converge, on saura trouver sa limite. Il nous faut donc maintenant trouver une condition pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Définition 15 ▶ Fonction k-contractante

On dit qu'une fonction f est k-contractante sur un intervalle I$\subseteq \mathbb{R}$ si :

$$\exists\, k \in]0\,;1[\mid \forall\,(x,y) \in \mathrm{I}\times\mathrm{I},\ |f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|.$$

De cette définition, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 5 ▶ Théorème du point fixe

Soit f une fonction k-contractante sur un intervalle I$\subseteq \mathbb{R}$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)\end{cases}$$

Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point fixe de f qui appartient à I.

Du fait que f soit k-contractante sur I, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N},\ |f(u_{n+1})-f(u_n)| &\leqslant k|u_{n+1}-u_n|\\ &\leqslant k|f(u_n)-f(u_{n-1})|\\ &\leqslant k\times k|u_n-u_{n-1}|\\ &\leqslant k^2|f(u_{n-1})-f(u_{n-2})|\\ &\leqslant k^3|u_{n-1}-u_{n-2}|\\ &\leqslant \vdots\\ &\leqslant k^{n-p}|u_{n-p+1}-u_{n-p}|\\ &\leqslant \vdots\\ |u_{n+2}-u_{n+1}| &\leqslant k^n|u_1-u_0|.\end{aligned}$$

Or, $k\in]0\,;1[$ d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} k^n|u_1-u_0| = 0\ ,$$

ce qui implique :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_{n+2}-u_{n+1}| = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

■

Ce théorème permet, entre autre, de déterminer une valeur approchée de la solution à une équation non résoluble par radicaux.

Exercice 58 ▶ Équation cos x = x

Déterminer une valeur approchée de la solution à l'équation :

$$\cos x = x.$$

Considérons la fonction f définie sur $\mathrm{I} = \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ par :

$$f(x) = \cos x.$$

Sa dérivée est :

$$f'(x) = -\sin x$$

et donc :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ |f'(x)| < 1.$$

L'inégalité des accroissements finis[a] nous dit alors que f est k-contractante sur I, où $k = \sup_{x\in\mathrm{I}} |f'(x)|$.

De plus,

$$\frac{1}{2} < \cos\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant \cos 1 < 1\ ,$$

donc I est stable par f : $f(\mathrm{I}) \subseteq \mathrm{I}$.

Ainsi, en considérant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$$

nous sommes assurés que la suite converge vers le point fixe de f, c'est-à-dire la solution à l'équation $f(x) = x$.

Á l'aide d'un tableur, par exemple, on obtient :

$$u_{88} \approx 0{,}739\,085\,133\,215\,161\ ,$$

et avec plus de précision, on a :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n \approx 0{,}739\,085\,133\,215\,160\,641\,655\,312\,087\,673\,87}.$$

---

a. Inégalités des accroissements finis : si f est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$, et s'il existe un réel k tel que pour tout x de $]a\,;b[$, $|f'(x)| \leqslant k$, alors $\left|\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\right| \leqslant k$.

Dans ce genre de calculs, il est toujours très utile d'avoir une majoration de l'erreur commise. En notant ℓ la limite de la suite, on a :

$$\begin{aligned}|u_n - \ell| &= |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \\ &\leqslant k^n |u_0 - \ell| \\ &\leqslant k^n |\mathrm{I}|.\end{aligned}$$

Cela sous-entend que plus le facteur de contraction est proche de « 0 » et plus l'intervalle I est de faible amplitude, plus la suite convergera rapidement.

Exercice 59 ▶ Vers le nombre d'or

On pose :

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

Donner la valeur exacte de ce nombre.

Posons :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Alors,

$$\varphi = \lim_{n \to +\infty} u_n.$$

Posons alors :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Donc :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

et donc :

$$\forall\, x \in]1\,;2],\ |f'(x)| < 1.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in]1\,;2],\ \frac{1}{2} &\leqslant \frac{1}{x} < 1 \\ \iff \frac{3}{2} &\leqslant f(x) < 2 \\ \iff 1 &< f(x) < 2.\end{aligned}$$

Ainsi, l'intervalle $\mathrm{I} =]1\,;2]$ est stable par f.

f est continue et contractante sur I, qui est stable par f, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point fixe $\ell \neq 0$ de f sur I.

$$\begin{aligned}\ell = f(\ell) &\iff \ell = 1 + \frac{1}{\ell} \\ &\iff \ell^2 = \ell + 1 \\ &\iff \ell^2 - \ell - 1 = 0.\end{aligned}$$

Le polynôme $\ell^2 - \ell - 1$ admet pour discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)\\ \Delta &= 5.\end{aligned}$$

L'unique solution dans I est :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On en déduit alors :

$$\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\cdots}}} = \frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{5}}.$$

N.B. φ est appelé le nombre d'or. Nous le retrouverons plus tard...

Exercice 60 ▶ Encore le nombre d'or

On pose :

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}.$$

Déterminer sa valeur exacte.

Posons :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

Alors :

$$\varphi = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Posons alors :

$$f(x) = \sqrt{1+x}\ ,$$

d'où :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

et :

$$\forall\, x \in [1\,;2],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1.$$

Donc f est contractante sur I$= [1\,;2]$.

De plus,

$$\forall\, x \in [1\,;2],\ 1 < \sqrt{2} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{3} < 2\ ,$$

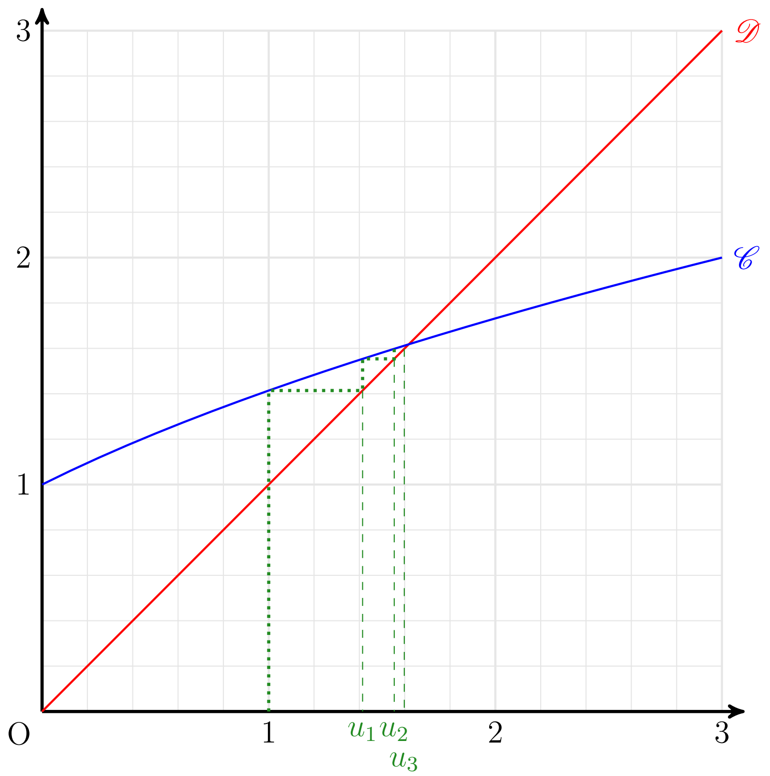
donc I est stable par f.
Le point fixe de f est le nombre ℓ de I tel que :

$$\begin{aligned}\ell = f(\ell) &\iff \ell = \sqrt{1+\ell}\\ &\iff \ell^2 = 1+\ell\\ &\iff \ell^2 - \ell - 1 = 0.\end{aligned}$$

Encore cette maudite équation ! Sacre bleu ! Mais on arrive donc à la même valeur que dans l'exercice précédent !

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Pour les suites définies par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, nous pouvons visualiser la convergence éventuelle sur un graphique.
Prenons l'exercice 60 et traçons la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \sqrt{1+x}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$. À l'aide de celles-ci, nous pouvons construire graphiquement les premiers termes de la suite et conjecturer le comportement de la suite.



Nous avons ici ce que l'on appelle une configuration en escalier.

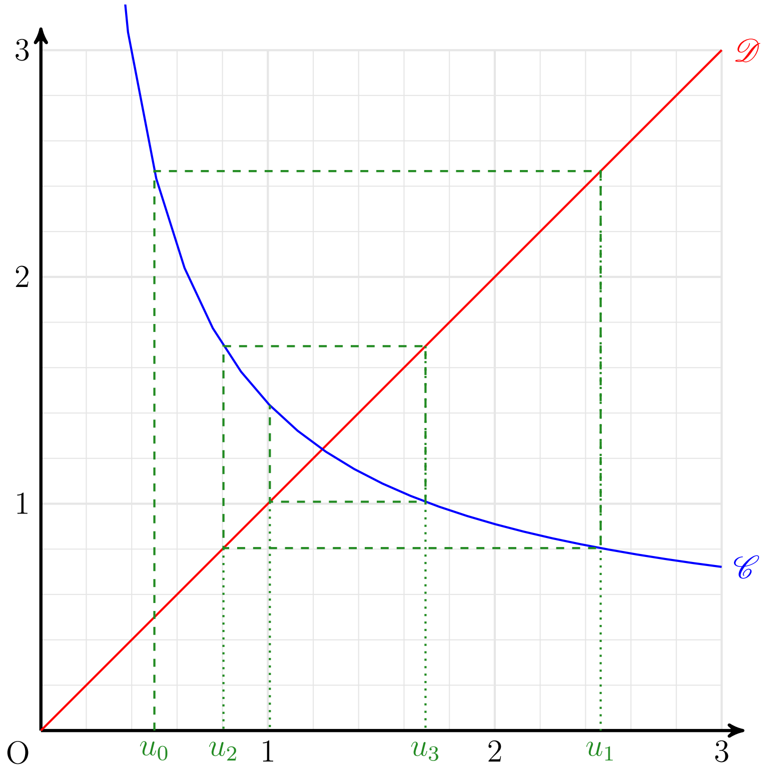
Exercice 61 ▶ Configuration en escargot

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \dfrac{1}{\ln(u_n+1)} \end{cases}$$

Étudier graphiquement la convergence de cette suite, puis la démontrer.
Donner une valeur approchée à 10^{-5} près de la solution de l'équation :

$$x\ln(x+1) = 1.$$



On obtient ici une spirale qui semble converger vers le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$. On appelle cela une configuration en escargot.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble donc converger vers le point fixe de f, où $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x+1)}$.

$$\begin{aligned} x = f(x) &\iff x = \frac{1}{\ln(x+1)} \\ &\iff x\ln(x+1) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers la solution de l'équation proposée.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}.$$

Donc :

$$\forall\, x \in [1\,;1{,}7],\ \frac{1}{2{,}7\ln 2{,}7} \leqslant |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2\ln 2} < 1.$$

Donc, f est contractante sur $[1\,;1{,}7]$.

De plus,

$$\forall\, x \in [1\,;1{,}7],\ 1 < \frac{1}{\ln(2{,}7)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\ln 2} < 1{,}7.$$

Ainsi, l'intervalle I$= [1\,;1{,}7]$ est stable par f.

Tout est donc réuni pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur α.

L'algorithme page suivante nous permet de calculer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Algorithme 8: Valeur approchée d'une solution à une équation

Entrées

$u \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Traitement

$n \leftarrow 0$, $u \leftarrow 0.5$ (premier terme de la suite)

Tant que $|u - 1/\ln(u+1)| \geqslant 0{,}000\,01$

$u \leftarrow 1/\ln(u+1)$

$n \leftarrow n+1$

Fin du Tant que

Sortie

Afficher u_n

On trouve alors $\alpha \approx 1{,}239\,98$.

Exercice 62 ▶ Héron, Héron, petit patapon

Soit a un réel strictement positif et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = E\left(\sqrt{a}\right) + 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

On pose :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\, f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

1. Démontrer que pour tout réel x non nul,

$$f'(x) = \frac{\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right)}{2x^2}.$$

2. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
3. Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, \sqrt{a} < u_{n+1} < u_n \leqslant u_0.$$

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{a}\right).$$

5. En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, 0 < u_n - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{a}\right)$$

puis la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

N.B. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite de Héron, du nom du mathématicien grec Héron d'Alexandrie, du 1[er] siècle après J.-C.
Cet énoncé est construit de sorte à ce que les élèves de terminale puisse trouver la limite de cette suite, mais avec ce que nous avons vu dans ce chapitre, on peut beaucoup plus facilement la trouver.

1 $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - a}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})}{x^2}\right).$$

2 On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$x - \sqrt{a}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{a}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{a}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

3 Raisonnement par récurrence :

- **Initialisation.**
  On sait que :
  $$u_0 = E\left(\sqrt{a}\right) + 1\,,$$
  donc :
  $$\sqrt{a} < u_0\,,$$
  d'où :
  $$a < u_0^2.$$
  Ainsi :
  $$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) \\ &< \frac{1}{2}\left(u_0 + u_0\right) \\ &< u_0. \end{aligned}$$

De plus, f est strictement croissante sur $]\sqrt{a}\,; +\infty]$ donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{a} < u_0 &\iff f\left(\sqrt{a}\right) < f\left(u_0\right) \\ &\iff \sqrt{a} < u_1. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien montré que :

$$\sqrt{a} < u_1 < u_0.$$

L'initialisation est donc réalisée.

4 **Hérédité.** Supposons qu'à un certain rang n, on ait :

$$\sqrt{a} < u_{n+1} < u_n \leqslant u_0.$$

Comme f est strictement croissante sur $[\sqrt{a}\,; u_0]$:

$$f\left(\sqrt{a}\right) < f\left(u_{n+1}\right) < f\left(u_n\right) \leqslant f\left(u_0\right) \ ,$$

soit :

$$\sqrt{a} < u_{n+2} < u_{n+1} \leqslant u_1 < u_0.$$

L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et décroissante. Elle converge donc.

5 On a :

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}\\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}.\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, on sait que $\sqrt{a} < u_n$ donc que $\dfrac{1}{u_n} < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{a} &< \frac{1}{2}u_n + \frac{\sqrt{a}}{2} - \sqrt{a}\\ &< \frac{1}{2}u_n - \frac{\sqrt{a}}{2}\\ &< \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{a}\right).\end{aligned}$$

6 Nous allons montrer le résultat par récurrence sur n.

- **Initialisation.**
  Pour $n = 0$, on a :

  $$\frac{1}{2^0}\left(u_0 - \sqrt{a}\right) = u_0 - \sqrt{a}.$$

  Donc l'initialisation est réalisée.

- **Hérédité.**
  Supposons vraie la formule pour un certain rang n. Alors :

  $$\begin{aligned}u_{n+1} - \sqrt{a} &< \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{a}\right) \text{ d'après la question précédente}\\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left(u_0 - \sqrt{a}\right) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\end{aligned}$$

  De plus, d'après la question 3,

  $$u_{n+1} - \sqrt{a} > 0.$$

Finalement, on a :

$$0 < u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left(u_0 - \sqrt{a}\right).$$

L'hérédité est donc démontrée, ce qui signifie que la formule est vraie pour tout entier naturel n.

D'après le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), on a alors :

$$0 < \lim_{n\to+\infty} \left(u_n - \sqrt{a}\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{a}\right).$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{a}\right) = 0\ ,$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_n - \sqrt{a}\right) = 0\ ,$$

ce qui signifie :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}.}$$

Suites homographiques 8

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les suites définies par une fonction.
Nous allons voir dans ce chapitre une catégorie de ces suites.

Définition 16 ▶ Suites homographiques

Une suite homographique est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\exists\,(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4,\ c \neq 0,\ |\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

L'appellation de ces suites vient des fonctions homographiques, qui sont de la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.
On exclut le cas $c = 0$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait une suite arithmético-géométrique.

L'objet de ce chapitre sera essentiellement de trouver un critère de convergence de ce genre de suites.
D'après le chapitre précédent, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre ℓ, alors :

$$\ell = \frac{a\ell + b}{c\ell + d},$$

donc, si :

$$c\ell^2 + (d-a)\ell - b = 0.$$

Définition 17 ▶ Polynôme caractéristique

On appellera polynôme caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

le polynôme :

$$P(x) = cx^2 + (d-a)x - b.$$

ℓ est donc une racine de ce polynôme, quand elle existe.

- **Supposons que P admette deux racines distinctes.**
  Notons ces deux racines α et β, puis considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}.$$

On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, et on suppose que $ad - bc \neq 0$.

Alors, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}}{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{a\beta+b}{c\beta+d}} \text{ car } f(\alpha) = \alpha \text{ et } f(\beta) = \beta \\
&= \frac{(au_n+b)(c\alpha+d) - (cu_n+d)(a\alpha+b)}{(au_n+b)(c\beta+d) - (cu_n+d)(a\beta+b)} \times \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} \\
&= \frac{(u_n-\alpha)(ad-bc)}{(u_n-\beta)(ad-bc)} \times \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} \\
&= \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} v_n.
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique si $c\beta + d \neq 0$. D'où le théorème suivant :

Théorème 6 ▶ Critère de convergence pour 2 racines distinctes à P

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite homographique de polynôme caractéristique P définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d} \quad , \quad ad - bc \neq 0.$$

Si P admet deux racines distinctes α et β et si $0 < \left|\dfrac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right| < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

En effet, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ précédemment définie converge vers « 0 » si et seulement si $\left|\dfrac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right| < 1$. Et dans ce cas, cela signifie que $\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ tend vers 0, et donc que u_n tend vers α. ■

- **Supposons que P admette une racine double.**
  Notons cette racine α et considérons la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{u_n - \alpha}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - \alpha} \\
&= \frac{1}{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}} \\
&= \frac{(cu_n+d)(c\alpha+d)}{(au_n+b)(c\alpha+d) - (cu_n+d)(a\alpha+b)} \\
&= \frac{(cu_n+d)(c\alpha+d)}{(u_n-\alpha)(ad-bc)}.
\end{aligned}$$

Or, α étant une racine double de P, ce dernier admet un discriminant nul. Donc :

$$\begin{aligned}(d-a)^2+4bc=0 &\iff ad-bc=ad-\frac{(d-a)^2}{4}\\ &\iff ad-bc=\frac{(a+d)^2}{4}.\end{aligned}$$

De plus, comme α est une racine double de P, on peut la calculer avec les formules vues en 1[re] :

$$\alpha=\frac{a-d}{2c}.$$

On a alors :

$$c\alpha+d=\frac{a+d}{2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}w_{n+1}&=\frac{cu_n+d}{u_n-\alpha}\times\frac{\frac{a+d}{2}}{\frac{(a+d)^2}{4}}\\ &=\frac{cu_n+d}{u_n-\alpha}\times\frac{2}{a+d}\\ &=\frac{2}{a+d}\times\frac{cu_n-c\alpha+c\alpha+d}{u_n-\alpha}\\ &=\frac{2}{a+d}\times\left[c+\frac{c\alpha+d}{u_n-\alpha}\right]\\ &=\frac{2c}{a+d}+2\frac{c\alpha+d}{a+d}\times\frac{1}{u_n-\alpha}\\ &=\frac{2c}{a+d}+2\frac{c\alpha+d}{2(c\alpha+d)}\times\frac{1}{u_n-\alpha}\\ &=\frac{2c}{a+d}+\frac{1}{u_n-a}\\ w_{n+1}&=w_n+\frac{2c}{a+d}.\end{aligned}$$

Notons que $a+d\neq 0$. En effet, $c\alpha+d=\frac{a+d}{2}$ et comme α existe, $c\alpha+d\neq 0$.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmétique de raison non nulle et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}|w_n|=+\infty\ ,\quad \text{ce qui implique :}\quad \lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha.$$

Théorème 7 ▶ Critère de convergence pour 1 racine double de P

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite homographique de polynôme caractéristique P définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{au_n+b}{cu_n+d}\quad ,\quad ad-bc\neq 0.$$

Si P admet une racine double α, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

- **Supposons que P n'admette aucune racine dans $\mathbb{K}$.**
  Alors, la fonction f n'admet aucun point fixe et dans ce cas, la suite ne peut pas admettre de limite.

Théorème 8 ▶ Critère de divergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite homographique de polynôme caractéristique P définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \quad , \quad ad - bc \neq 0.$$

Si P n'admet aucune racine dans $\mathbb{K}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 63

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

Le polynôme caractéristique de cette suite est :

$$P(x) = x^2 - x - 1$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 5.$$

Il y a donc deux racines distinctes à P :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Il reste à choisir laquelle sera α en sachant que, nécessairement, $\left|\dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d}\right| < 1.$

$$\begin{aligned} cx_1 + d &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} cx_2 + d &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$cx_2 + d > cx_1 + d\ ,$$

ce qui signifie que $\alpha = x_2$.

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

La suite converge donc vers le nombre d'or.

Exercice 64

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}.$$

Le polynôme caractéristique de cette suite est $P(x) = x^2 - 2$. Il y a donc deux racines distinctes :

$$x_1 = -\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \sqrt{2}.$$

Or,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n > 0$$

(Nous pouvons le démontrer par récurrence, mais c'est assez immédiat)

Ainsi, la limite de la suite ne peut être que positive. D'où :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}.}$$

Exercice 65

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{4u_n}.$$

Écrire un algorithme permettant d'afficher tous les termes de la suite jusqu'à une valeur approchée à 10^{-3} près de la limite.

Le polynôme caractéristique de la suite est :

$$P(x) = (2x - 1)^2$$

admettant une racine double $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$

Algorithme 9: Valeur approchée de la limite

Entrées

$u \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Traitement

$n \leftarrow 0$

$u \leftarrow 3$ (premier terme de la suite)

Tant que $|u - 0{,}5| \geqslant 0{,}001$

$u \leftarrow \frac{4u-1}{4u}$

Fin du Tant que

Sortie

Afficher u

Exercice 66

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 3}.$$

Le polynôme caractéristique de la suite est :

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

dont le discriminant est strictement négatif.

Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Suites linéaires à coefficients constants

9

Dans ce chapitre, je désignerai par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 18 ▶ Suites linéaires d'ordre p

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est linéaire d'ordre p si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k} \quad , \quad (a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p.$$

Je noterai alors $\mathscr{L}_p$ l'ensemble de ces suites et, si besoin est, $\mathscr{L}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites linéaires d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 11

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 5u_n \end{cases}$$

est une suite linéaire d'ordre 2.

L'ensemble $\mathscr{L}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, mais quelle est sa dimension ?

Considérons la famille de suites $\left\{s^{(k)}\right\}_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ où :

$$s_j^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases} \qquad j \in [\![0; p-1]\!]$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ s_{n+p}^{(k)} = \sum_{q=1}^{p} a_q s_{n+p-q}^{(k)}.$$

Il y a p suites dans cette famille.

- **Ces suites sont indépendantes.**
  En effet, si la suite $\left(\alpha_0 s^{(0)} + \alpha_1 s^{(1)} + \cdots + \alpha_{p-1} s_n^{(p-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est identiquement nulle, alors tous les α_i sont nuls.

- **Ces suites sont génératrices de $\mathscr{L}_p$.**
  On montre en effet par récurrence que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}_p$, alors :

$$u_n = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j s_n^{(j)}.$$

La famille est donc une partie génératrice finie libre de $\mathscr{L}_p$; donc ça en est une base. D'où la proposition suivante :

Proposition 23 ▶ Dimension de $\mathscr{L}_p$

L'ensemble $\mathscr{L}_p$ des suites linéaires d'ordre p à coefficients constants est tel que :

$$\dim\left(\mathscr{L}_p\right) = p.$$

Remarquons que l'on peut écrire de façon matricielle une suite de $\mathscr{L}_p$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-2} \\ u_{n+p-1} \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-2} \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$$

système que je noterai :

$$U_{n+1} = AU_n$$

ce qui n'est pas sans nous rappeler les suites géométriques. Nous pouvons alors écrire :

$$U_n = A^n U_0.$$

La donnée de U_n nous donnera l'expression de u_n ; la difficulté sera de calculer A^n.
Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$\chi(x) = \det\left(xI_p - A\right) = x^p - a_1 x^{p-1} - a_2 x^{p-2} - \cdots - a_p.$$

On dira que χ est aussi le polynôme caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Supposons que χ ait exactement p racines distinctes réelles.**
  Notons alors ces racines α_i, $1 \leqslant i \leqslant p$. A est alors diagonalisable donc peut s'écrire :

  $$A = P^{-1}DP$$

  où P désigne la matrice de passage de la base canonique à la base dans laquelle A est diagonale.
  Alors,

  $$A^n = P^{-1}D^nP.$$

  On arrive ainsi à montrer que u_n s'exprime comme combinaison linéaire des α_i :

  $$u_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_i^n.$$

  Ainsi, $\left\{\alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots, \alpha_p^n\right\}$ est une base de $\mathscr{L}_p$.

Théorème 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}_p(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique χ.
Si χ admet exactement p racines réelles distinctes $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, alors :

$$\exists\ (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbb{K}^p \mid u_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_i^n\ .$$

- **Supposons que χ ait exactement p racines distinctes complexes.**
Avant tout, notons le fait qu'un nombre complexe non réel soit racine d'un polynôme implique que son conjugué l'est aussi.
Notons α_1, α_2, $\ldots$, α_m les racines réelles et β_1, $\ldots$, β_k, $\overline{\beta_1}$, $\ldots$, $\overline{\beta_k}$ les racines complexes, avec $m+2k=p$.
Notons ensuite $\beta_t = \rho_t\left(\cos\theta_t + \mathrm{i}\sin\theta_t\right)$ pour $1 \leqslant t \leqslant k$.
On démontre que les suites $\left(\Re\left(\beta_t^n\right)_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\Im\left(\beta_t^n\right)_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $\mathscr{L}_p$.
Ainsi, $\left\{\alpha_1^n, \ldots, \alpha_m^n, \Re\left(\beta_1^n\right), \ldots, \Re\left(\beta_k^n\right), \Im\left(\beta_1^n\right), \ldots, \Im\left(\beta_k^n\right)\right\}$ est une base de $\mathscr{L}_p$.

Théorème 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}_p(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique χ.
Si χ admet exactement p racines complexes distinctes $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$, $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ et $\left(\overline{\beta_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant k}$, alors :

$$\exists\ (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \in \mathbb{K}^m,\ \exists\ (\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \in \mathbb{K}^k,\ \exists\ (\nu_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \in \mathbb{K}^k \mid$$
$$u_n = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i^n + \sum_{i=1}^{k} \left(\mu_i \beta_i^n + \nu_i \overline{\beta_i}^n\right).$$

- **Supposons que χ n'ait pas exactement p racines distinctes complexes.**
Notons alors $r_i = \mathrm{ord}\left(\alpha_i\right)$ l'ordre de multiplicité de α_i et $c_i = \mathrm{ord}\left(\beta_i\right)$ celui des β_i et $\overline{\beta_i}$, en gardant les notations précédentes.
Raisonnons sur α_1 (le raisonnement étant valable quelles que soient les racines) :

$$\alpha_1^{n-p}\chi\left(\alpha_1\right) = 0\ ,$$

donc :

$$\alpha_1^n = a_1\alpha_1^{n-1} - \cdots - a_p\alpha_1^{n-p}\ ,$$

ce qui prouve que $\left(\alpha_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}_p$.

Ensuite, tout est basé sur la remarque suivante : si α est une racine d'ordre de multiplicité r d'un polynôme Q, alors elle sera racine d'ordre de multiplicité $(r-1)$ du polynôme Q'.

Appliquée au polynôme Q défini, pour $n \geqslant p$, par :

$$Q(x) = x^{n-p}\chi(x)\ ,$$

on a :

$$Q'(x) = (n-p)x^{n-p-1}\Big[(n-p)\chi(x) + x\chi'(x)\Big].$$

α_1 est une racine d'ordre de multiplicité $(r_1 - 1)$ du polynôme $Q'(x)$ donc :

$$\alpha_1^{n-p}\left[(n-p)\left(\alpha_1^p - \sum_{k=1}^{p} a_p \alpha_1^{p-k}\right) + \alpha_1\left(p\alpha_1^{p-1} - \sum_{k=1}^{p-1} k a_k \alpha_1^{p-1-k}\right)\right] = 0\ ,$$

soit, en développant :

$$n\alpha_1^n - \sum_{k=1}^{p}(n-k)a_k\alpha_1^{n-k} = 0\ ,$$

ce qui démontre que $(n\alpha_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}_p$.
En recommençant $(r_1 - 2)$ fois, on constate que l'on construit une famille de r_1 suites indépendantes.
En procédant ainsi pour toutes les racines, on voit se dessiner une base de $\mathscr{L}_p$ (en distinguant les parties réelles et imaginaires des racines complexes).

Théorème 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}_p(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique χ.
Si χ n'admet pas exactement p racines complexes distinctes, alors :

$$\begin{aligned}\exists\ (P_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in (\mathbb{K}[X])^p\ \mid \\ u_n = P_1(n)\alpha_1^n + \cdots + P_m(n)\alpha_m^n + P_{m+1}\beta_1^n + \cdots + P_{m+k}(n)\beta_k^n \\ + P_{m+k+1}(n)\overline{\beta_1}^n + \cdots + P_{m+2k}(n)\overline{\beta_k}^n\end{aligned}$$

où $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$, $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ et $\left(\overline{\beta_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant k}$ sont les racines de χ et où chaque polynôme P_i a un degré strictement inférieur à l'ordre de la racine qui lui est adjointe.

La suite de Fibonacci

C'est au XIII^e siècle que la publication par Léonard de Pise, dit *Fibonacci*, d'observations sur la croissance d'une population de lapins a donné comme modèle la suite que nous allons voir ici, qui est la suite linéaire la plus célèbre sur Terre ... la suite de Fibonacci.

Fibonacci
(1175 - 1250)

Au début $(t = 0)$, on a un couple A de jeunes lapins. Le mois suivant $(t = 1)$, les deux lapins sont adultes, le couple est appelé B. Après un second mois $(t = 2)$, deux jeunes lapins naissent et on a deux couples B et A. Pour résumer, d'un mois au suivant, chaque A devient B et chaque B devient BA.

Les couples sont, successivement, A, B, BA, BAB, BABBA, BABBABAB etc. (ce sont les mots de Fibonacci sur l'alphabet A, B).

Les nombres de couples de lapins sont 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... (nombres de Fibonacci).

On définit ainsi la suite de Fibonacci (appellation donnée par Édouard Lucas au XIX^e siècle) de la façon suivante :

Définition 19 ▶ Suite de Fibonacci

La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

est appelée la suite de Fibonacci.

Le polynôme caractéristique de cette suite est :

$$\chi(x) = x^2 - x - 1$$

admettant pour racines :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

φ est appelé le nombre d'or (nous l'avons déjà rencontré dans les chapitres précédents).

D'après le théorème 9 de ce chapitre,

$$\exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n = \lambda\varphi^n + \mu\overline{\varphi}^n.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} F_0 = \lambda + \mu \\ F_1 = \lambda\varphi + \mu\overline{\varphi} \end{cases}$$

On obtient, après calculs, la formule suivante :

Proposition 24 ▶ Formule de Binet

Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite de Fibonacci, alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Il existe bon nombre d'égalités sur les nombres de Fibonacci. Vous en trouverez suffisamment sur Internet donc je ne vais pas m'y attarder. Surtout que ce n'est pas l'objectif principal de cet ouvrage. Regardons plutôt un exercice qui fait intervenir cette suite.

Exercice 67 ▶ Les dominos

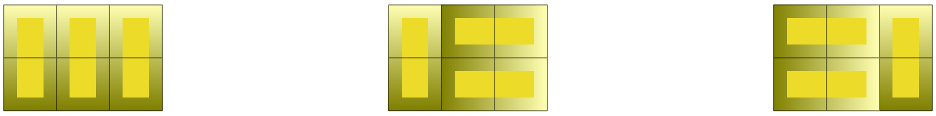
On dispose d'une grille de dimensions $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
De combien de façons différentes peut-on disposer des dominos (à couleur unique sans motif) de sorte qu'ils recouvrent totalement la grille ?

Comme à notre habitude, regardons ce qui se passe pour les premières valeurs de n.

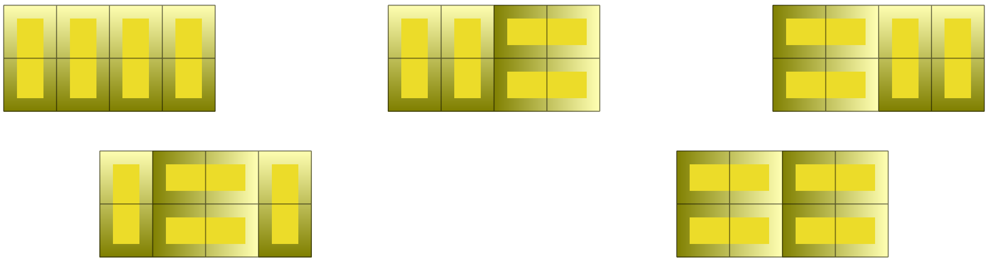
- **Si $n = 1$.** Il n'y a qu'une seule façon de disposer le domino : 

- **Si $n=2$.** Il y a 2 façons de disposer les dominos :

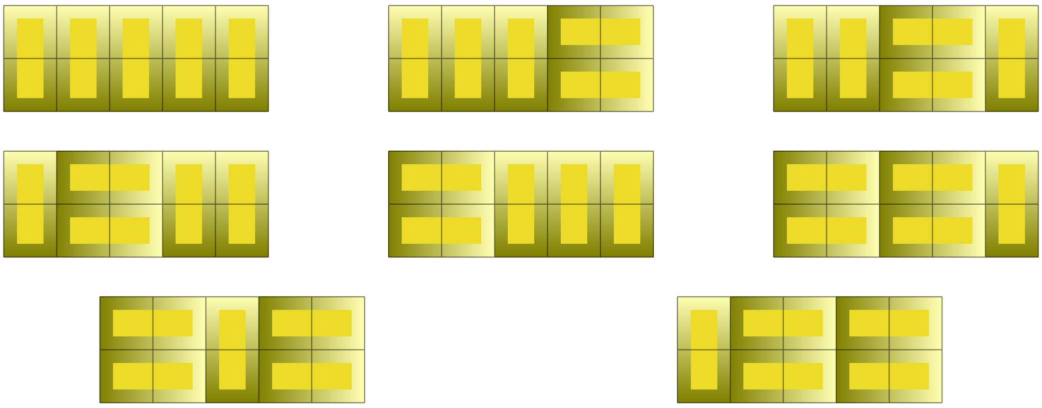
- **Si $n=3$.** Il y a 3 façons de disposer les dominos :



- **Si $n=4$.** Il y a 5 façons de disposer les dominos :



- **Si $n=5$.** Il y a 8 façons de disposer les dominos :

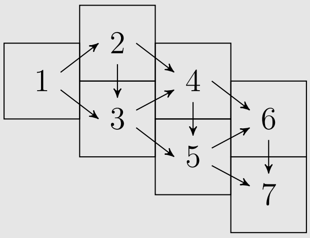


En regardant le nombre de possibilités concernant les valeurs suivantes de n, on constaterait que ces nombres sont les nombres de Fibonacci.

Il y a donc F_n façons de disposer les dominos.

Exercice 68 ▶ L'homme-crabe

Un homme se déplace dans un couloir infini où il n'avance que face à lui ou vers sa droite sans jamais aller vers sa gauche ni revenir en arrière. Combien de chemins possibles peut-il emprunter pour aller à la case n ?



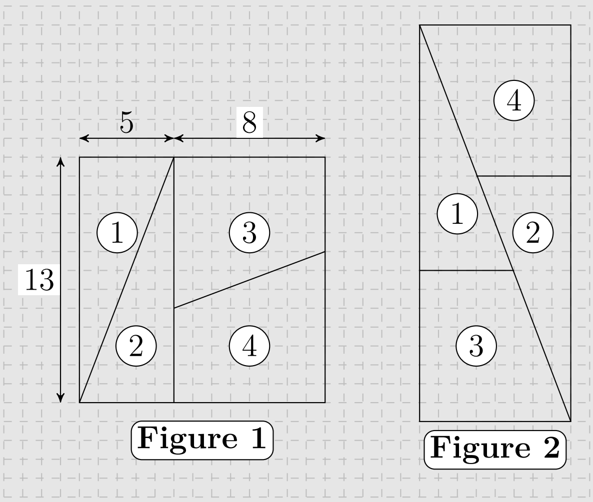
De la case 1 à la case 2, il y a 1 possibilité ;
De la case 1 à la case 3, il y a 2 possibilités ($1 \to 3$ ou $1 \to 2 \to 3$) ;
De la case 1 à la case 4, il y a 3 possibilités ;
De la case 1 à la case 5, il y a 5 possibilités ;
De la case 1 à la case 6, il y a 8 possibilités ;
De la case 1 à la case 7, il y a 13 possibilités ;
...

En fait, pour aller à la case n, on doit ajouter le nombre de possibilités pour aller à la case $n - 1$ et pour aller à la case $n - 2$. C'est donc bien une relation de récurrence « à la Fibonacci », et comme les premiers termes sont exactement ceux de la suite de Fibonacci, le nombre de possibilités engendre la suite de Fibonacci.

Il y a donc F_n chemins possibles.

Exercice 69 ▶ Un étrange puzzle

On partage un carré de côté 13 cm en quatre morceaux comme indiqué ci-dessous (figure 1) puis, avec les morceaux, on construit la figure 2. Obtient-on réellement un rectangle ?



La figure 1 a pour aire 64 cm^2. Si la figure 2 était un rectangle, il aurait pour aire 65 cm^2, ce qui prouve que ce n'est pas un rectangle.

Cette pseudo illusion d'optique vient du fait que les pentes des deux hypoténuses des triangles rectangles, à savoir $\dfrac{13}{5}$ et $\dfrac{8}{3}$ sont très proches l'une de l'autre mais pas égales.

Cette particularité a été mise en relief pour la première fois par Lewis Carroll (auteur de Alice aux pays des merveilles).
Cet exercice est dans cette section car si vous êtes un peu observateur, vous verrez que les trois nombres qui interviennent sont trois termes consécutifs de la suite de Fibonacci ; dans un cas général, on pourrait considérer cet exercice avec n'importe quel triplet de nombres consécutifs de cette suite.

La suite de tribonacci

Ce nom est un néologisme inspiré bien entendu de *Fibonacci*. Cette suite est définie de la façon suivante :

Définition 20 ▶ Suite de tribonacci

La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0 = 0$, $T_1 = T_2 = 1$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$$

est appelée la suite de tribonacci.

Le polynôme caractéristique de cette suite est :

$$\chi(x) = x^3 - x^2 - x - 1$$

dont une racine est :

$$\alpha = \frac{\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + \sqrt{33}} + 1}{3} \approx 1{,}839\,286\,755\,214\,16.$$

En France, Gilles Hainry, professeur à l'université du Mans, décide de nommer cette valeur le nombre d'argent dans un article de 1996 du numéro 48 de la revue Tangente, terminologie reprise par l'IREM de Lyon ultérieurement lorsqu'il parle des nombres de métal.

Cette appellation a été inspirée du nombre d'or qui intervient dans la suite de Fibonacci. Il y a d'ailleurs un point commun entre le nombre d'or et le nombre d'argent :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \alpha.$$

Ainsi, la limite du rapport de deux termes consécutifs des deux suites est finie.
De cette observation, il est tout à fait légitime de souhaiter généraliser...

Les suites de k-bonacci

Définition 21 ▶ Suites de k-bonacci

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de k-bonacci si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+k} = \sum_{p=0}^{k-1} u_{n+p}.$$

Le polynôme caractéristique d'une telle suite est :

$$\begin{aligned}\chi(x) &= x^k - \sum_{p=0}^{k-1} x^p \\ &= x^k - \frac{x^k-1}{x-1} \quad (x \neq 1) \\ &= \frac{x^{k+1}-2x^k+1}{x-1} \quad (x\neq 1).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\chi(x) = 0 \iff x^{k+1} - 2x^k + 1 = 0.$$

Posons alors :

$$f(x) = x^{k+1} - 2x^k + 1.$$

Alors,

$$f'(x) = x^{k-1}\Big[(k+1)x - 2k\Big].$$

La dérivée s'annule pour $x = 0$ et $x = \dfrac{2k}{k+1} > 0$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{2k}{k+1}$	$+\infty$
f	-1 ↘	$f\left(\frac{2k}{k+1}\right)$	↗ $+\infty$

$f\left(\dfrac{2k}{k+1}\right) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left]\dfrac{2k}{k+1}\,;+\infty\right[$.
Notons alors α_k la solution qui reste.

Regardons maintenant le rapport de deux termes consécutifs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{u_n + u_{n-1} + \cdots + u_{n-k+1}}{u_n} \\ &= 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n} + \frac{u_{n-2}}{u_n} + \cdots + \frac{u_{n-k+1}}{u_n} \\ &= 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n} + \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_n} + \cdots + \frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k+2}} \times \frac{u_{n-k+2}}{u_{n-k+3}} \times \cdots \times \frac{u_{n-1}}{u_n}\end{aligned}$$

Posons alors $r_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Alors :

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_{n-1}r_n} + \cdots + \frac{1}{r_{n-k+2}r_{n-k+3}\cdots r_n} \qquad (1)$$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \ell$ existe, est finie et non nulle, alors :

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell^2} + \cdots + \frac{1}{\ell^{k-1}} \,,$$

soit :

$$\chi(\ell) = 0$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_k.$$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \infty$, alors l'égalité (1) implique :

$$\lim_{n\to+\infty} r_{n+1} = 1 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n} + \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} r_{n-1}r_n} + \cdots + \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} r_{n-k+2}r_{n-k+3}\cdots r_n} \,,$$

soit :

$$\infty = 1$$

ce qui est absurde. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n \neq \infty$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, ce qui est impossible sauf si $u_0 = u_1 = \cdots = u_{k-1} = 0$ ce qui est, a priori, écarté.

De plus, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Comme sa limite ne peut pas être infinie, elle est nécessairement majorée. Donc elle converge.

Théorème 12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de k-bonacci.
Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_k \,,$$

où α_k est la racine du polynôme caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $(\alpha_k)_{k\geqslant 2}$ constitue la suite des nombres de métal.

Notons $\chi_k(x)$ le polynôme caractéristique de la suite de k-bonacci. Alors,

$$\begin{aligned}
\chi_k(\alpha_k) = 0 &\iff \alpha_k^{k+1} - 2\alpha_k + 1 = 0 \\
&\iff \alpha_k^k(\alpha_k - 2) = -1 \\
&\iff \chi_{k+1}(\alpha_k) = \frac{\alpha_k^{k+1}(\alpha_k - 2) + 1}{\alpha_k - 1} \\
&\iff \chi_{k+1}(\alpha_k) = \frac{1 - \alpha_k}{\alpha_k - 1} \\
&\iff \chi_{k+1}(\alpha_k) = -1 \\
&\iff \chi_{k+1}(\alpha_k) < 0 \\
&\iff \alpha_{k+1} > \alpha_k \text{ car } \chi_k \text{ strictement croissant pour tout } k.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ est strictement croissante ; de plus, elle est majorée par 2. En effet, $\chi_k(2) = 1$ et $\chi_k(1) = 1 - k$; ce qui sous-entend que $\alpha_k \in \,]1\,;2[$.
La suite $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ est donc convergente.

Les premiers nombres de métal sont :

k	Appellations	Valeurs approchées
2	nombre d'or	1,618 033 988 703
3	nombre d'argent	1,839 286 755 203
4	nombre de bronze	1,927 561 975 475
5	-	1,965 948 236 645
6	-	1,983 582 843 425
7	-	1,991 964 196 605
8	-	1,996 031 179 735

Il semblerait que la limite de la suite $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ soit égale à 2.

De l'égalité $f(\alpha_k) = 0$, on déduit :

$$\begin{aligned}\alpha_k^{k+1} - 2\alpha_k + 1 = 0 &\iff \frac{\alpha_k^{k+1} - 2\alpha_k + 1}{x^k} = 0 \\ &\iff \frac{1}{\alpha_k^k} - (2 - \alpha_k) = 0.\end{aligned}$$

Posons alors :

$$g(x) = \frac{1}{x^k} - (2 - x).$$

On peut démontrer que $g\left(2 - \frac{1}{k}\right) \leqslant 0$ et :

x	1		$\sqrt[k+1]{k}$		α_k		2
g	0	$\searrow$	< 0	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2^k}$

D'où :

$$\alpha_k \geqslant 2 - \frac{1}{k}.$$

Or,

$$\lim_{k\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{k}\right) = 2\ ,$$

donc :

$$\lim_{k\to+\infty} (\alpha_k) = 2.$$

N.B. On arrive même à montrer le comportement asymptotique suivant :

$$\alpha_k = 2 - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2^{2k}} - \frac{3}{8} \cdot \frac{k^2}{2^{3k}} + o\left(\frac{1}{2^{3k}}\right).$$

Exercice 70 ▶ Les tranches de buche

On dispose d'une bûche de longueur n centimètres, $n \in \mathbb{N}^*$, et d'une trancheuse électrique qui permet de faire des tranches de 1, 2, 3, ... ,k centimètres d'épaisseur.
De combien de façons peut-on découper notre bûche en tenant compte de l'ordre des tranches ?

Prenons par exemple $n = 5$ et faisons un tableau récapitulatif des diverses possibilités qui s'offrent à nous :

k	Possibilités	Nombres de possibilités
1	$1+1+1+1+1$	1
2	$1+1+1+1+1$ $1+1+1+2$, $1+1+2+1$ $1+2+1+1$, $2+1+1+1$ $1+2+2$, $2+1+2$, $2+2+1$	$8 = F_6$ 6ᵉ nombre de Fibonacci
3	$1+1+1+1+1$ $1+1+1+2$, $1+1+2+1$ $1+2+1+1$, $2+1+1+1$ $1+2+2$, $2+1+2$, $2+2+1$ $1+1+3$, $1+3+1$, $3+1+1$ $2+3$, $3+2$	$8 = F_6$ 6ᵉ nombre de tribonacci

On pourrait remarquer, si on regardait de plus près, que le nombre de possibilités est le $(n+1)$-ième nombre de la suite de k-bonacci.

La suite de Padovan

Définition 22 ▶ Suite de Padovan

La suite de Padovan est la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $p_0 = p = 1 = p_2 = 1$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ p_{n+3} = p_{n+1} + p_n.$$

Le polynôme caractéristique de cette suite est :

$$\chi(x) = x^3 - x - 1$$

polynôme de la forme x^3+px+q dont une racine est donnée par la formule de Cardan-Tartaglia :

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad , \qquad \Delta = 4p^3+27q^2 \geqslant 0.$$

Ici, $\Delta = 23$, ce qui nous donne pour racine :

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{23}{108}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{23}{108}}\,,$$

soit :

$$\alpha \approx 1{,}324\,717\,957\,244\,746\,025\,960\,908\,854\,477.$$

Vu la complexité de cette valeur, il est évident que nous ne tenterons pas d'exprimer le terme général de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais avec la partie théorique que nous avons vue au début de ce chapitre, nous savons que c'est possible. Je vais seulement me contenter de vous donner la réponse sans les détails :

$$p_n = \frac{1+\alpha}{\alpha^{n+2}(2+3\alpha)} + \frac{1+\beta}{\beta^{n+2}(2+3\beta)} + \frac{1+\gamma}{\gamma^{n+2}(2+3\gamma)}$$

où β et γ sont les autres racines de χ.

Comme pour les suites de k-bonacci, il serait intéressant de regarder la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$$r_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{p_{n-1}+p_{n-2}}{p_n}\\ &= \frac{p_{n-1}}{p_n} + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} \times \frac{p_{n-1}}{p_n}\end{aligned}$$

d'où :

$$r_{n+1} = \frac{1}{r_n}\left(1+\frac{1}{r_{n-1}}\right).$$

Ainsi, si on note ℓ la limite de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors on a $\chi(\ell)=0$.
On arrive assez fastidieusement à démontrer que $\ell=\alpha$.
Dans la mesure où :

$$\alpha^3 = 1+\alpha\ ,$$

on peut écrire :

$$\alpha = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\cdots}}}.$$

La suite de Bereha

Définition 23 ▶ Suite de Bereha

La suite de Bereha est la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ B_n = 2+2\cos\frac{2\pi}{n}.$$

Si je vous parle de cette suite ici, c'est qu'outre-Atlantique, le nombre d'argent n'est pas défini comme en Europe. En effet, la *sylver constant* est définie comme étant la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec :

$$r_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\ ,$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+3} = 5u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n.$$

Le polynôme caractéristique de cette suite est :

$$\chi(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

qui admet parmi ces trois racines la septième constante de Bereha (c'est la racine la plus grande).

La septième constante de Bereha intervient aussi dans la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $v_0 = \sqrt[3]{7}$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \sqrt[3]{7 + 7u_n}.$$

Cette suite converge vers un nombre ℓ tel que :

$$\ell = \frac{B_7 - 4}{3 - B_7}\,,$$

d'où l'égalité suivante :

$$\sqrt[3]{7 + \sqrt[3]{7 + \sqrt[3]{7 + \cdots}}} = 1 + \frac{3}{2\cos\frac{2\pi}{7} - 1}$$

La suite de Pell

Définition 24 ▶ Suite de Pell

La suite de Pell est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses premiers termes $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n.$$

Le polynôme caractéristique de cette suite est :

$$\chi(x) = x^2 - 2x - 1.$$

La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, r_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

converge vers la racine de χ qui est positive, à savoir $\ell = 1 + \sqrt{2}$.

Cette suite va nous être utile dans le chapitre suivant.

Fractions continues

10

Définition 25 ▶ Fractions continues

Un nombre x admet une écriture en fraction continue généralisée s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$x = x_0 + \frac{x_1}{x_2 + \frac{x_3}{x_4 + \frac{x_5}{x_6 + \cdots}}}$$

Un nombre x admet une écriture en fraction continue s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$x = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \cdots}}}$$

On s'intéressera ici davantage aux fractions continues qu'aux fractions continues généralisées d'un nombre. Les fractions continues apparaissent avec la nécessité d'approximer les nombres à l'aide de fractions. C'est au VI^e siècle de notre ère qu'on les trouve pour la première fois dans un ouvrage du mathématicien indien Âryabhata, qui les utilise pour résoudre des équations diophantiennes.

Pour abréger les notations, on décide de noter :

$$x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \cdots}}} = [x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots]$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être finie ou infinie, et c'est d'ailleurs sur cette finitude que vont se jouer quelques résultats intéressants.

Prenons un rationnel quelconque, par exemple $x = \frac{63}{20}$, et cherchons son écriture en fraction continue : sa partie entière est « 3 » donc :

$$\frac{63}{20} = 3 + \frac{1}{x_1},$$

d'où :

$$\frac{1}{x_1} = \frac{63}{20} - 3 = \frac{3}{20}$$

et donc :

$$x_1 = \frac{20}{3} = 6 + \frac{1}{x_2}.$$

Ainsi de suite pour arriver finalement à :

$$\frac{63}{20} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Cela vous rappelle quelque chose ? Si tel est le cas, ce n'est pas anormal car on voit cela dès la classe de 6^e : ce sont des divisions euclidiennes successives qui constituent l'*algorithme d'Euclide* (vu en classe de 3^e).

On écrit finalement :

$$\frac{63}{20} = [3{,}6{,}1{,}2]\,.$$

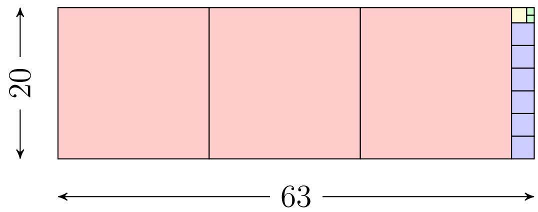
Prenons maintenant un rationnel à écriture décimale infinie (donc périodique), par exemple :

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = [2{,}3].$$

On peut constater ici que ce n'est pas parce que la partie décimale est infinie que l'écriture en fraction continue l'est aussi.
Par contre, si la partie décimale est infinie non périodique, alors on peut démontrer que l'écriture en fraction continue est aussi infinie.

En effet, si la fraction continue s'arrête, il est évident que le nombre est rationnel. Supposons maintenant que l'on prenne un nombre $\frac{p}{q} > 1$ rationnel et considérons un rectangle de dimensions $p \times q$. Mettons-y alors le plus grand nombre possible de carrés de côtés q. Il restera un rectangle de côtés $kq(p-q)$, où k est le nombre de carrés que l'on a pu mettre. Dans ce nouveau rectangle, mettons le plus grand nombre possible de carrés de côté $(p-q)$ et ainsi de suite. Dans la mesure où les côtés des rectangles et carrés sont entiers, le procédé va s'arrêter tôt ou tard car les mesures des côtés constituent une suite décroissante d'entiers.

Si l'on considère l'homothétique du rectangle initial affecté du coefficient $\frac{1}{q}$, on a un rectangle de dimensions $1 \times \frac{1}{q}$. La construction précédente peut s'assimiler à la construction de la fraction continue de $\frac{p}{q}$. Pour s'en convaincre, regardez la schématisation suivante en prenant comme exemple $\frac{p}{q} = \frac{63}{20}$:



Il y a 3 carrés roses, 6 bleus, 1 jaune et 2 verts ce qui correspond à l'écriture en fraction continue [6, 5, 1,2] du nombre $\frac{63}{20}$.

Proposition 25

Un nombre est rationnel si et seulement si son développement en fraction continue est fini.

On peut ainsi démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel en considérant le fait que :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

En effet, cette écriture signifie que la fraction continue de $\sqrt{2}$ ne s'arrête jamais. On obtient :

$$\sqrt{2} = [1{,}2{,}2{,}2,\cdots].$$

Définition 26 ▶ Irrationnel quadratique

Un nombre **irrationnel quadratique** est un nombre s'écrivant sous la forme :

$$\frac{a \pm \sqrt{b}}{c} \qquad , \qquad (a,b,c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*.$$

Si je vous parle de tels nombres, c'est que l'on peut trouver une écriture périodique infinie en fraction continue de n'importe lequel d'entre eux.
En effet, si l'on considère un nombre x strictement positif qui n'est pas un carré parfait, puis le plus grand nombre entier y dont le carré y^2 est plus petit que x, posons r le nombre :

$$r = x - y^2 = \left(\sqrt{x} - y\right)\left(\sqrt{x} + y\right) \ ;$$

alors,

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - y = \frac{r}{\sqrt{x}+y} &\iff \sqrt{x} = y + \frac{r}{\sqrt{x}+y} \\ &\iff \sqrt{x} = [y,2ry,2y,2ry,2y,2ry,2y,\cdots] \\ &\iff \sqrt{x} = [y,\overline{2ry,2y}]\,. \end{aligned}$$

Ainsi, un nombre irrationnel quadratique aura une écriture en fraction continue infinie. Mais quid de la réciproque ?
Avant de répondre à cette dernière question, voyons deux définitions.

Définition 27 ▶ Nombre ultimement périodique

Un nombre x admet une écriture **ultimement périodique** en fraction continue s'il s'écrit sous la forme :

$$x = [a_0,a_1,a_2,\cdots,a_p,\overline{x_0,x_1,\cdots,x_n}]\,.$$

Un nombre x admet une écriture **purement périodique** en fraction continue s'il s'écrit sous la forme :

$$x = [\overline{x_0,x_1,\cdots,x_n}]$$

où les a_i et x_i sont des entiers naturels.

Considérons un nombre x dont l'écriture en fraction continue est purement périodique. Alors :

$$x = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{x_n + x}}}.$$

En réduisant cette fraction, on arrive à une expression de la forme :

$$x = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}.$$

Ainsi, x est solution d'une équation de degré 2, donc c'est un irrationnel quadratique.

Maintenant, si x admet une écriture en fraction continue ultimement périodique, il s'écrit :

$$x = a_0 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_p + \alpha}}$$

où α est un nombre dont l'écriture est purement périodique, donc un irrationnel quadratique (d'après ce qui précède). L'inverse de la somme d'un irrationnel quadratique et d'un entier naturel est aussi un irrationnel quadratique donc x est un irrationnel quadratique.

Théorème 13 ► de Lagrange

Un nombre est un irrationnel quadratique si et seulement si son écriture en fraction continue est ultimement périodique.

Il s'en suit alors que les irrationnels non quadratiques n'admettent pas de développement périodique en fraction continue.

Mais restons un peu dans les irrationnels quadratiques et remarquons quelques formules intéressantes.

Proposition 26 ► Quelques formules

Soit a un entier naturel. Alors :

- $\sqrt{a^2+1} = [a,\overline{2a}]$
- $\sqrt{a^2+2} = [a,\overline{a,2a}]$
- $\sqrt{a^2+\dfrac{2a}{x}} = [a,\overline{x,2a}]$, $x \in \mathbb{N}$

À l'aide de ces formules, on peut donner une approximation de certaines racines carrées :

Exemple 12 ► Approximation de racines carrées

- $\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1} = [2,\overline{4}] \approx 2 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}} \approx 2{,}23.$
- $\sqrt{11} = \sqrt{3^2+2} = [3,\overline{3,6}] \approx 3 + \dfrac{1}{3+\frac{1}{6}} \approx 3{,}31.$
- $\sqrt{30} = \sqrt{5^2+\dfrac{2\times 5}{2}} = [5,\overline{2,10}] \approx 5 + \dfrac{1}{2+\frac{1}{10}} \approx 5{,}47.$

Intéressons-nous maintenant au nombre e, où $\ln \mathrm{e} = 1$.
Un programme informatique nous montre que :

$$\mathrm{e} = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,\cdots].$$

Pour le nombre π, cela donne :

$$\pi = [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,\cdots].$$

Il n'y a ici aucune régularité. Cependant, il existe un développement en fraction continue généralisée intéressant qui fait intervenir π :

$$\pi = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots}}}}.$$

Équation de Pell-Fermat

L'une des raisons historiques de l'existence des fractions continues est la résolution des équations de la forme :

$$x^2 - dy^2 = \pm 1 \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$$

où d n'est pas un carré parfait.
En effet, on démontre que si le couple $(x\,;y)$ est solution de cette équation, alors $\frac{x}{y}$ est une réduite de $\sqrt{d}$, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel n tel que :

$$\frac{x}{y} = [d_0, d_1, \cdots, d_n] \,.$$

Il existe une méthode pour trouver une solution minimale de l'équation :

$$x^2 - dy^2 = \varepsilon \quad , \quad \varepsilon = \pm 1 \,.$$

- On cherche la plus petite période m du développement en fraction continue de $\sqrt{d}$.
- Si $\varepsilon = 1$:
  On cherche la $(m-1)$-ième réduite $\frac{a}{b}$ de $\sqrt{d}$.
  - Si m est pair, la solution minimale est $x_1 = a$ et $y_1 = b$.
  - Si m est impair, la solution minimale est $x_1 = a^2 + db^2$ et $y_1 = 2ab$.
- Si $\varepsilon = -1$:
  - Si m est pair, il n'y a pas de solution.
  - Si m est impair, on cherche le premier pair $n = mk - 1$.

Exemple 13 ▶ Résolution d'une équation de Pell-Fermat

1 On considère l'équation :

$$x^2 - 31y^2 = 1.$$

On a :

$$\sqrt{31} = [5, \overline{1,1,3,5,3,1,1,10}] \,.$$

Donc ici, $m = 8$.
La solution minimale est alors telle que $\frac{x_1}{y_1} = \frac{1\,520}{273}$. Le couple solution est donc :

$$x = 1\,520 \qquad \text{et} \qquad y_1 = 273.$$

2 On considère l'équation :

$$x^2 - 53y^2 = -1.$$

Ici, $m = 5$. On cherche donc le plus petit entier pair $n = 5k - 1$, soit $n = 4$. D'où :

$$(x_4\,; y_4) = (182\,; 25) \,.$$

Ce dernier couple est solution de l'équation.

Les équations de Pell-Fermat sont importantes car elles sont à l'origine de la construction d'une structure d'anneau utilisée notamment pour prouver que l'équation $x^5 + y^5 = z^5$ n'admet aucune solution entière.

★ Majoration de l'erreur

Nous l'avons vu précédemment, si l'on note :

$$x = \lim_{n \to +\infty} [x_0, x_1, \cdots, x_n] \ ,$$

alors, on peut démontrer que :

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < 1 \qquad , \qquad \frac{p_n}{q_n} = [x_0, x_1, \cdots, x_n] \, .$$

On parle alors de convergence quadratique.

★ Autre méthode de résolution

Nous avons vu une façon de résoudre les équations de Pell-Fermat à l'aide des fractions continues, mais quelques fois, cela peut paraître un peu fastidieux. Aussi sommes-nous en droit de nous demander s'il existe une autre façon de procéder... et bien sûr, la réponse est « oui ».

Considérons l'équation de Pell-Fermat suivante :

$$x^2 - d^2 y = 1$$

où d n'est pas un carré parfait.

Elle peut être représentée graphiquement par une hyperbole, que nous nommerons $\mathscr{H}_d$.
Le point $M_0\,(1\,;0)$ appartient à cette hyperbole, quelle que soit la valeur de d.
Notons maintenant $M_1\,(x_1\,;y_1)$ le point de $\mathscr{H}_d$ tel que y_1 soit la plus petite valeur entière positive.
Considérons alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ & (x;y) & \longmapsto & (\alpha x + \beta y\,; \gamma x + \delta y) \end{array}$$

où α, β, γ, δ sont choisis de sorte que $h\,(x_0\,;y_0) = (x_1\,;y_1)$ et $h\,(x_n\,;y_n) = (x_{n+1}\,;y_{n+1})$ soient les coordonnées de points appartenant à $\mathscr{H}_d$.

$$\begin{aligned} h\,(x_0\,;y_0) = (x_1\,;y_1) &\iff x_1^2 - dy_1^2 = 1 \text{ car } M_1 \in \mathscr{H}_d \\ &\iff (\alpha x_0 + \beta y_0)^2 - d\,(\gamma x_0 + \delta y_0)^1 = 1 \\ &\iff \alpha^2 - d\gamma^2 = 1 \text{ car } x_0 = 1 \text{ et } y_0 = 0 \\ &\iff \alpha = x_1 \text{ et } \gamma = y_1 \ . \end{aligned}$$

De plus,

$$\beta x_1 - d\delta y_1 = 0 \ ,$$

donc :

$$\beta x_1 = d\delta y_1 \ .$$

En prenant $\beta = dy_1$ et $\delta = x_1$, les conditions sont vérifiées et on a alors :

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ & (x;y) & \longmapsto & (x_1 x + dy_1 y\,; y_1 x + x_1 y) \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} M_n \in \mathscr{H}_d &\iff x_n^2 - dy_n^2 = 1 \\ &\iff \left(x_n - \sqrt{d}y_n\right)\left(x_n + \sqrt{d}y_n\right) = 1. \end{aligned}$$

On peut de plus montrer par récurrence sur n que :

$$\begin{cases} \left(x_1 + \sqrt{d}y_1\right)^{n+1} = x_n + \sqrt{d}y_n & (1) \\ \left(x_1 - \sqrt{d}y_1\right)^{n+1} = x_n - \sqrt{d}y_n & (2) \end{cases}$$

d'où :

$$M_n \in \mathscr{H}_d \iff (x_1 - dy_1)^n = 1.$$

Cette dernière égalité étant toujours vraie, on est assuré que la donnée de M_1 assure l'existence d'une infinité de solutions.

En additionnant et soustrayant les égalités (1) et (2), on obtient la proposition suivante :

Proposition 27 ▶ Vers les solutions de l'équation de Pell-Fermat

L'équation $x^2 - dy^2 = 1$, représentée graphiquement par l'hyperbole $\mathscr{H}_d$, admet pour solutions entières :

$$x_n = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n + \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n}{2}$$

et

$$y_n = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n - \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n}{2\sqrt{d}},$$

où $M_1\,(x_1\,;y_1) \in \mathscr{H}_d$, avec x_1 le plus petit entier naturel possible.

Notons maintenant que $x_1 + y_1\sqrt{d}$ et $x_1 - y_1\sqrt{d}$ sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$, où $S = 2x_1$ et $P = 1$.
Ceci nous mène à considérer l'égalité $X^2 = SX - P$ et donc la suite linéaire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$x_{n+2} = 2x_1x_{n+1} - x_n.$$

Il en est de même pour les y_n, d'où le résultat suivant :

Théorème 14 ▶ Solutions de l'équation de Pell-Fermat

L'équation $x^2 - dy^2 = 1$ admet pour solutions entières tous les couples $(x_n\,;y_n)$ tels que :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} (x_1\,;y_1) \text{ donné} \\ x_1^2 - dy_1^2 = 1 \end{cases}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+2} = 2x_1x_{n+1} - x_n \\ y_{n+2} = 2x_1y_{n1} - y_n \end{cases}$$

Exemple 14 ▶ Résolution d'une équation de Pell-Fermat

Considérons l'équation :

$$x^2 - 5y^2 = 1.$$

On a $M_1\,(9\,;4) \in \mathscr{H}_5$ donc :

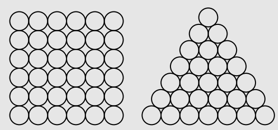
$$x_n = \frac{\left(9+4\sqrt{5}\right)^n + \left(9-5\sqrt{5}\right)^n}{2} \quad ; \quad y_n = \frac{\left(9+4\sqrt{5}\right)^n - \left(9-5\sqrt{5}\right)^n}{2\sqrt{5}}$$

Ce qui donne les premières solutions suivantes :

$$(x_0\,;y_0) = (1\,;0)\,;\ (x_1\,;y_1) = (9\,;4)\,;\ (x_2\,;y_2) = (161\,;72)\,;\ (x_3\,;y_3) = (2\,889\,;1\,292)\,.$$

Exercice 71 ▶ Les tuyaux

On dispose d'un certain nombre de tuyaux de diamètres identiques. On souhaite les ranger indifféremment en carré ou en triangle équilatéral comme sur la figure ci-contre.
Le but est de trouver tous les nombres de tuyaux qui conviennent.



Notons b le nombre de tuyaux de la base du triangle, c le nombre de tuyaux formant un côté du carré et N le nombre de tuyaux au total.
c^2 représente le nombre de tuyaux dans le carré ; donc $c^2 = N$.
Pour trouver le nombre de tuyaux dans le triangle en fonction de celui constituant sa base, regardons ce qui se passe :

- Avec 2 tuyaux à la base, $N = 2+1 = 3$;
- Avec 3 tuyaux à la base, $N = 3+2+1 = 6$;
- Avec 4 tuyaux à la base, $N = 4+3+2+1 = 10$;

  $\vdots$
- Avec b tuyaux à la base, $N = \dfrac{b(b+1)}{2}$

On a ainsi l'équation :

$$2c^2 = b^2 + b\,,$$

soit, en multipliant par 4 :

$$8c^2 = 2b(2b+2).$$

On pose maintenant $B = 2n+1$ et $C = 2c$. Il vient alors :

$$2C^2 = (B-1)(B+1)\,,$$

soit :

$$B^2 - 2C^2 = 1 \qquad (1).$$

La plus petite période du développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ étant $m = 1$ (car $\sqrt{2} = [1,\overline{2}]$), on cherche le plus petit impair $n = 2k+1$, soit $n = 1$. D'où :

$$\frac{B_1}{C_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi, $(3\,;2)$ est la solution minimale de l'équation (1), d'où :

$$B_n = \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2} \quad \text{et} \quad C_n = \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

et donc :

$$b_n = \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n - 2}{4} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n - \left(3-2\sqrt{2}\right)^n}{4\sqrt{2}}.$$

On peut alors dresser un tableau des premières valeurs :

n	b_n	c_n
1	1	1
2	8	6
3	49	35
4	288	102
5	1 681	1 189
6	9 800	6 930
7	57 121	40 391
8	332 928	235 416
9	1 940 449	1 372 105
10	11 309 768	7 997 214
11	65 918 161	46 611 179
12	384 199 200	271 669 860

On constate que pour $n = 1$, les résultats ne sont pas possibles pour notre problème. Ainsi, le plus petit nombre possible de tuyaux est :

$$N = 6^2 = 36 = 8+7+6+5+4+3+2+1.$$

N.B. À travers cet exercice, nous venons de voir comment générer tous les nombres qui sont à la fois carrés et triangulaires.

Exercice 72 ▶ Sous le commandement d'Harold

Des hommes, dirigés par Harold, sont groupés en 13 carrés égaux. Tous ces hommes peuvent former un seul grand carré.
Quel peut être le nombre total d'hommes sous le commandement d'Harold ?

D'après un problème tiré de Casse-tête mathématiques de Sam Loyd, *de Martin Gardner.*

Notons x^2 le nombre d'hommes dans le grand carré formé en réunissant tous les hommes des 13 groupes et Harold, et y^2 celui dans chacun des 13 groupes.
Alors, $x^2 = 13y^2 + 1$ soit :

$$x^2 - 13y^2 = 1.$$

Nous avons :

$$\sqrt{13} = [3,\overline{1,1,1,1,6}]\ ,$$

donc, $m = 5$. On a :

$$3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = \frac{18}{5}.$$

Ainsi, $x_1 = 18^2 + 13 \times 5^2 = 649$ et $y_1 = 2 \times 18 \times 5 = 180$.

Le nombre d'hommes au service d'Harold est donc $x = 13y_1^2 = 421\,200$ (les autres solutions étant beaucoup trop grandes pour être possibles).

11 Suites de Catalan

E.-C. Catalan
(1814 - 1894)

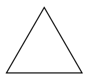
Nous sommes au XIX^{e} siècle.
Le belge Eugène-Charles Catalan se pose une étrange question : étant donné un polygone régulier, de combien de façons peut-on le découper en triangles sans que les lignes ainsi construites se croisent ? À la même époque, Binet se pose la même question, et au siècle précédent, le hongrois d'origine germanique Segner, ainsi qu'Euler, avaient abordé le même thème...

Définition 28 ▶ Nombres de Catalan

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle n-ième nombre de Catalan le nombre de façon(s) dont on peut découper un polygone régulier à $(n+2)$ côtés en triangles sans qu'aucune ligne ne se croise.

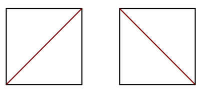
Regardons de plus près ce que cela peut donner : appelons c_n le nombre de possibilités pour un polygone régulier à $(n+2)$ cotés.

★ Cas du triangle équilatéral :



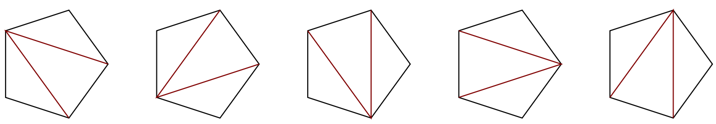
$c_1 = 1$

★ Cas du carré :



$c_2 = 2$

★ Cas du pentagone régulier :



$c_3 = 5$

On pourrait ainsi continuer et constater que $c_4 = 14$, $c_5 = 42$, $c_6 = 132$, $c_7 = 429$, $c_8 = 1\,430$, ...

Proposition 28 ▶ Identité de Touchard

Jacques Touchard (1885 – 1968) est un mathématicien français, connu pour ses travaux en combinatoire. On lui doit notamment l'égalité :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

En partant de cette identité, on peut écrire :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{(2n+2\,!}{(n+1)\,!(n+2)\,!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+2)} \times \frac{(2n)\,!}{n\,!(n+1)\,!} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n\ . \end{aligned}$$

d'où la proposition suivante :

Proposition 29 ▶ Relation de récurrence sur les nombres de Catalan

Soit c_n le n-ième nombre de Catalan, $n \geqslant 1$.
Alors,

$$c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n\ .$$

Cette proposition peut s'avérer très utile pour calculer les termes successifs de la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$.

De la proposition 28 et de la formule de Stirling :

$$n\,! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\ ,$$

on peut trouver un équivalent asymptotique à c_n.
En effet,

$$\begin{aligned} \frac{(2n)\,!}{n\,!(n+1)\,!} &\sim \frac{\sqrt{2\pi \times 2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \times \sqrt{2\pi(n+1)}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}} \\ &\sim \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2\pi n} \times \left[2^n \times \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right]^2}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \times \sqrt{2\pi(n+1)}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}} \\ &\sim \frac{\sqrt{2} \times 2^{2n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}{\sqrt{2\pi(n+1)}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}} \\ &\sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi} \times \sqrt{n} \times n} \qquad \text{car } n+1 \sim n \\ &\sim \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Proposition 30 ▶ Équivalent asymptotique du nombre de Catalan

Soit c_n le n-ième nombre de Catalan.
Alors,

$$c_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}.$$

N.B. Si c_n est le n-ième nombre de Catalan, alors c_n est impair si et seulement si $n = 2^k - 1$.

Applications

Définition 29 ▶ Mot de DYCK

Soit $\mathscr{L} = \{X; Y\}$. Un mot de DYCK de longueur $2n$ sur $\mathscr{L}$ est une succession de $2n$ éléments de $\mathscr{L}$ de sorte que, lorsque l'on parcourt cette succession (ce « mot ») de gauche à droite, le nombre de « X » rencontrés est toujours supérieur ou égal à celui de « Y ».

Exemple 15

Pour $n = 3$, les mots de DYCK sont :

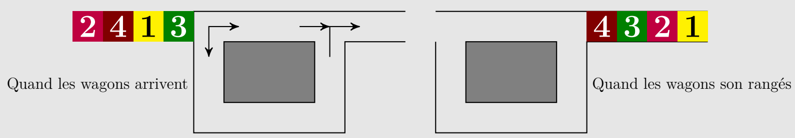
$$XXXYYY \quad ; \quad XYXXYY \quad ; \quad XYXYXY \quad ; \quad XXYYXY \quad ; \quad XXYXYY$$

On peut vérifier que le nombre de mots de DYCK de longueur $2n$ est égal à c_n.
Si l'on remplace X et Y par, respectivement, une parenthèse ouvrante et une parenthèse fermante, on peut aussi dire qu'il y a c_n façons de placer des parenthèses autour de $(n+1)$ facteurs. On pourra par exemple écrire :

$$a(b(cd)) \quad ; \quad a((bc)d) \quad ; \quad (ab)(cd) \quad ; \quad (a(bc))d \quad ; \quad ((ab)c)d.$$

Exercice 73 ▶ Marcel et ses wagons

Marcel voit arriver à l'entrée d'un hangar, dans n'importe quel ordre, des wagons d'un train (numéroté de 1 à n) qu'il doit ranger à la sortie du hangar dans l'ordre décroissant tel qu'indiqué sur le schéma suivant :



Marcel arrivera-t-il toujours à ranger les wagons dans cet ordre ?

D'après un problème de « Maths en Jeans »

Il est assez évident de constater que s'il existe, parmi les n wagons arrivés à l'entrée du hangar, une suite de 3 wagons successifs numérotés k, $k+1$ et $k+2$ dans cet ordre, alors il sera impossible de les ranger convenablement à la sortie.
En effet, si à l'entrée, on a « k, $k+1$, $k+2$ », à la sortie, on aura « $k+1$, $k+2$, k » ou bien « k, $k+1$, $k+2$ » mais jamais « $k+2$, $k+1$, k ».

Dans un cas général, l'équipe ayant traité ce problème a montré que l'on peut ranger les

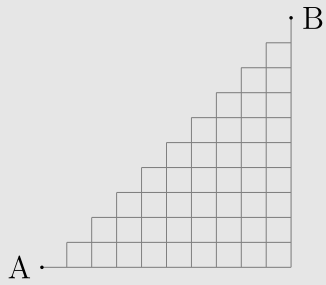
wagons comme l'on veut uniquement dans c_{n-1} cas.
Pour plus d'informations, vous pouvez consulter la page Internet dédiée à la recherche de la solution :

`http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/0005wago/00dbwag2.html`

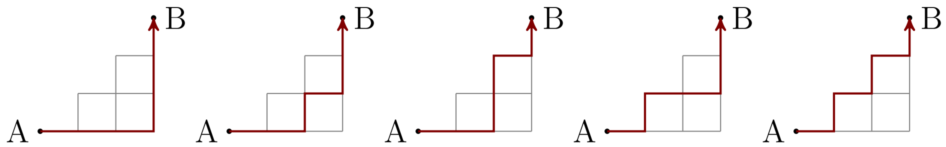
Exercice 74 ▶ Mimi la fourmi

Mimi la fourmi se trouve au point A. Elle souhaite arriver au point B où se trouve un succulent festin. Pour cela, elle peut se déplacer sur les fils tracés sachant qu'elle ne peut aller que de gauche à droite, ou que de bas en haut.

Combien de possibilités de chemins a-t-elle ?



Pour répondre à cette question, regardons ce qui se passe pour un maillage 3×3 :



Il y a ici 5 possibilités, c'est-à-dire c_3.

Dans un cas général, pour un maillage $n \times n$, il y a c_n chemins possibles. Donc Mimi a le choix entre c_{10} chemins pour notre exercice, c'est-à-dire $\dfrac{20!}{10! \times 11!} = 4\,199$.

Suites de Farey et Brocot

12

Nous sommes en 1816. Dans le *Philosophical magazine* paraît une lettre d'un géologue britannique répondant au nom de Sir John Farey, et dans laquelle il présente une famille de suites avec certaines propriétés qu'il ne démontre pas.
La lettre de Farey fut lue auparavant par Cauchy et c'est ce dernier qui, dans ses *Exercices de mathématiques*, démontra ce qu'avançait Farey et attribua les résultats démontrés au géologue. Cependant, sachons que Haros publia des résultats similaires en 1802...

Si l'on en croit la définition, une suite de Farey d'ordre n (c'est une famille de suites) est l'ensemble ordonné de façon croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1 compris dont le dénominateur est inférieur à n.
Ainsi, la première suite est :

$$F_1 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{2}\right\} \ ,$$

puis vient :

$$F_2 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\} \ ,$$

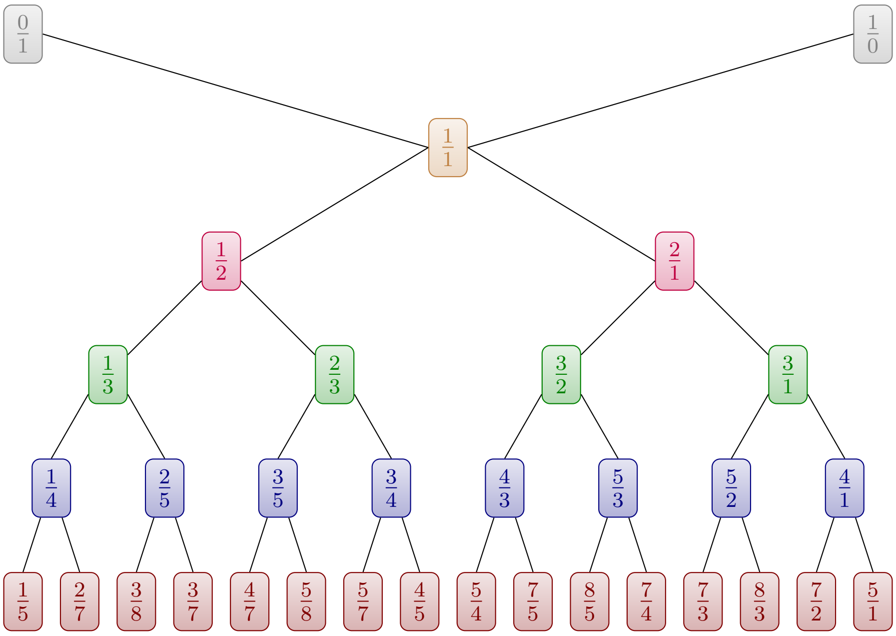
$$F_3 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right\} \ .$$

Vu comme cela, on peut ne pas comprendre comment on construit cette famille de suites. Aussi est-il primordial de constater le résultat suivant :

Proposition 31 ▶ Construction d'une suite de Farey

Chaque terme d'une suite de Farey est le médian des deux qui l'entourent, ces deux termes figurant dans la suite de Farey d'ordre $n-1$.

Autrement dit, si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux termes consécutifs de la suite de Farey d'ordre $n-1$, le terme qui va apparaître entre ces deux là dans la suite de Farey d'ordre n sera $\frac{a+c}{b+d}$.
Ceci génère ce que l'on appelle l'arbre de Stern-Brocot (voir page suivante) qui, contrairement à la suite de Farey initiale, commence par les termes $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$. Chaque niveau de cet arbre donne une suite que l'on appelle suite de Brocot.



On démontre que le nombre de termes de la suite F_n est :

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \ ,$$

où $\varphi(n)$ est l'indicateur d'Euler.

À l'aide de cet arbre, nous pouvons définir une méthode pour arriver à n'importe quelle fraction : Partons de $\frac{1}{1}$. En descendant tantôt vers la droite (D), tantôt vers la gauche (G), on pourra arriver à la fraction désirée. Ainsi, on pourra attribuer à chaque fraction une suite de "D" et de "G", ce que l'on appellera un *mot*. Par exemple, $\frac{2}{5}$ se verra attribuer le mot **GGD**.

On définit ainsi une application bijective :

$$f \ : \ \{G; D\} \to \mathbb{Q}$$

qui, à tout mot composé uniquement de D et de G, associe un rationnel.
On se demande alors comment trouver simplement la valeur de ce rationnel en fonction du mot donné. Pour cela, on assimilera la fraction $\frac{a}{b}$ au vecteur colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en posant :

$$q\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \frac{a}{b} \ .$$

Ainsi, on construit des suites de vecteurs que l'on assimilera aux suites de Brocot. Si l'on considère deux vecteurs consécutifs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, le terme médian de $q\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$ et $q\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$ dans la prochaine suite sera :

$$q\left(\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Maintenant, remarquons que chaque rationnel est « le fruit » de deux autres rationnels et que ces deux rationnels n'engendrent aucun autre rationnel. Appelons alors V_1 et V_2 les deux vecteurs qui engendrent le vecteur V , avec $q(V_1) < q(V_2)$, puis $\widehat{V}$ la matrice $\begin{pmatrix} V_2 & V_1 \end{pmatrix}$.

Posons M le mot « à traduire » en rationnel par la fonction f.
Si $\widehat{M} = \begin{pmatrix} V_2 & V_1 \end{pmatrix}$, alors $f(M) = \begin{pmatrix} V_2 & V_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si on note maintenant $\widehat{MD}$ le même mot auquel on a ajouté un « D » à droite, alors :

$$\widehat{MD} = \begin{pmatrix} V_2 & f(M) \end{pmatrix} = \widehat{M} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

De même,

$$\widehat{MG} = \begin{pmatrix} f(M) & V_1 \end{pmatrix} = \widehat{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

On définit deux matrices :

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \widehat{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

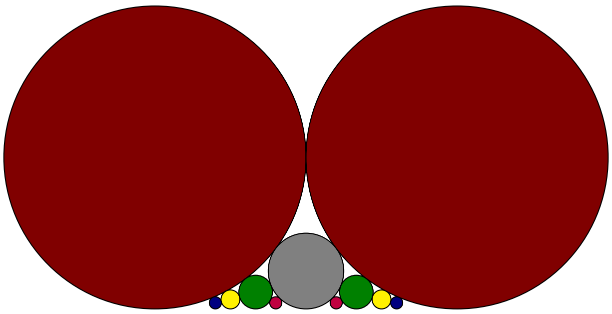
Si l'on regarde ce qui vient d'être écrit, on peut alors dire que si $M = x_1 x_2 \cdots x_n$, où $x_i \in \{G; D\}$, alors :

$$\widehat{M} = \widehat{x_1}\widehat{x_2} \cdots \widehat{x_n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Concrètement :

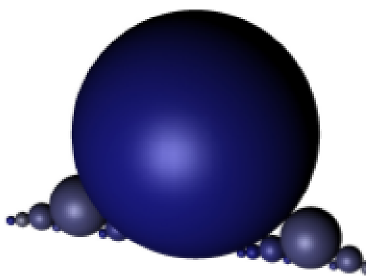
$$f(GDGDG) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix} .$$

Revenons un peu sur les suites de Farey.
En 1938, le mathématicien américain Lester Ford (père) écrit un article dans *American Monthly* dans lequel il introduit des cercles construits à partir des suites de Farey.
Concrètement, l'idée consiste à construire des cercles de centre $\left(\frac{p}{q} ; \frac{1}{2q^2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2q^2}$, où $\frac{p}{q}$ est un terme d'une suite de Farey. On obtient ainsi des cercles tangents comme l'illustre le dessin suivant :



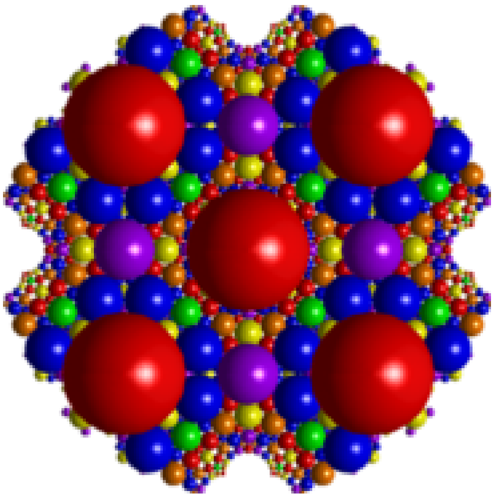
Cercles de Ford

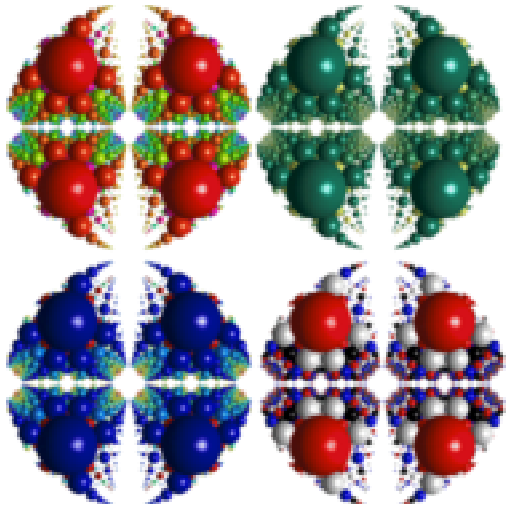
Clifford A. Pickover a eu l'idée de remplacer les cercles de Ford par des sphères :



Sphères de Pickover

Maintenant, si l'on généralise en considérant que p et q sont deux complexes, on peut réaliser des figures très esthétiques comme les figures suivantes :





Exercice 75 ▶ L'échelle du pompier

Sur mur vertical carré (mur 1), partagé en maillage régulier, sont solidement accrochées à chaque nœud du maillage des barres de fer horizontales comme le montre le schéma ci-dessous.
René le pompier pose son échelle (rétractable) au niveau de la barre rouge et doit l'appuyer sur une des barres de fer afin de rejoindre le mur 2. De combien de façons peut-il procéder ?

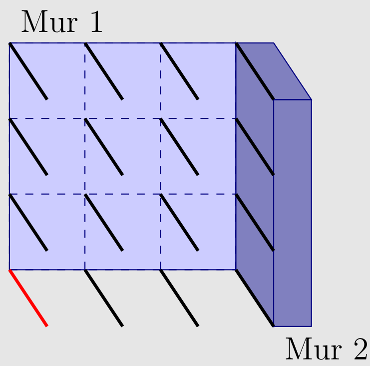
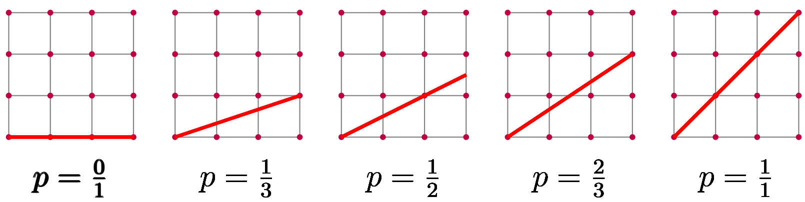


Schéma représentant un maillage 3×3

Représentons en dimension 2 toutes les possibilités pour l'exemple donné :



où p désigne la pente de l'échelle.
On reconnaît ici les termes consécutifs de F_3... Et si l'on prend du recul sur la signification de ces pentes, on s'aperçoit qu'il en sera de même pour les autres cas.
Ainsi, pour un maillage formant n^2 carrés, René aura $|F_n|$ possibilités de positionner son échelle.

Suites de Steinhaus et une variante

13

Hugo Dyonizy Steinhaus est un mathématicien polonais connu pour ses *Cent problèmes élémentaires de mathématiques résolus* (1965), ses suites itératives, ses réseaux et aussi pour le problème de Banach-Steinhaus en topologie. Bien entendu, nous nous pencherons tout particulièrement ici sur ses suites itératives.
Le principe est le suivant :

H.-D. Steinhaus
(1887 - 1972)

- On choisit au hasard deux chiffres x_1 et x_2, puis on les multiplie entre eux : le produit est un nombre à 1 chiffre x_3 ou à deux chiffres $\overline{x_3x_4}$;
- On place le produit à droite du nombre $\overline{x_1x_2}$ pour obtenir un autre nombre $\overline{x_1x_2x_3}$ ou $\overline{x_1x_2x_3x_4}$;
- Ensuite,on fait $x_2 \times x_3$: le produit est alors mis à droite du dernierf nombre formé ($\overline{x_1x_2x_3}$ ou $\overline{x_1x_2x_3x_4}$) ;
- On réitère cela à l'infini.

Exemple 16 ▶ Un exemple d'une suite de Steinhaus

Prenons comme chiffres initiaux 6 et 4.
Le produit donne 24 donc le nombre formé est « 6424 ». On vient de faire « 6×4 », il nous faut faire maintenant « 4×2 ». On arrive ainsi au nombre « **6424**8 ». Les nombres en gras sont déjà utilisés.
Maintenant, on fait « 2×4 », ce qui nous donne « **6424**88 ». Maintenant, on fait « 4×8 », ce qui nous donne « **64248**832 ». On obtient :

64	642**48**832	6424883**26**424612
6424	6424**88**3264	64248832**64**2461224
6**42**48	64248**83**26424	642488326**42**4612248
64**24**88	642488**32**64246	⋮

Le premier constat que l'on peut faire est que les nombres impairs sont rares. Mais peut-être est-ce dû au choix de nos deux premiers chiffres. Je vais donc regarder ce qui se passe si l'on prend deux nombres impairs au départ et faire une liste exhaustive (voir page suivante).

Départ	Début de la suite
11	111111...
13	1339271814788428...
15	155251010500000...
17	1774928361816241868...
19	19981728714165674...
31	313392718147884...
33	33927181478842856...
35	3515552525101010105...
37	3721142148243216...
51	515525101050000...
53	5315351515555525252525251010...
55	552510105000000...

Départ	Début de la suite
57	5735211510215500252500010...
59	594536201518120055...
71	7177492836181624186...
73	732162612126222....
75	753515155555252525...
77	7749283618162418688...
79	796354181520488510...
91	919981728714165 67...
93	932761442641681224...
95	9545202010000000...
97	97634218128288216...
99	99817287141656744...

Dans toutes ces suites, il existe un impair coincé entre deux pairs.
En analysant bien ce qui se passe, on voit, quels que soient les deux nombres de départ, que l'on obtient à partir d'un certain rang un nombre pair et à partir de là, s'en suivra nécessairement tôt ou tard une configuration de la forme « pair ; impair ; pair ».

Proposition 32 ▶ Nombres impairs

À partir d'un certain rang, tous les nombres impairs de la suite de Steinhaus sont entre deux nombres pairs.

À partir de cette proposition, on déduit que le « 9 » ne sera pas présent dans le nombre à partir d'un certain rang (en effet, le « 9 » peut être obtenu en faisant 3×3 ou 7×7 ou 9×1 ; or, nous avons dit précédemment que deux impairs ne pouvaient être accolés...). Ainsi, pour avoir un « 9 », il faut prendre comme chiffres initiaux : 1 et 9, 9 et 1, 7 et 7 ou 3 et 3, mais après quelques chiffres seulement, le « 9 » disparaît...

Il en est de même pour le nombre « 7 ».

Pour ce qui est du « 5 », il ne peut être obtenu qu'en faisant « $k \times 5$ », « 6×9 » et « 7×8 ». Or, à partir d'un certain rang, le « 7 » et le « 9 » n'existent plus... Donc pour que le « 5 » subsiste, il faut qu'il apparaisse dès le début, qu'il soit l'un des deux chiffres initiaux... et encore ! Si nous prenons « 55 » au début, le nombre obtenu sera « 552510105000000... ».

De même :

avec « 15 », on obtient 552510105000000...
avec « 25 », on arrive à 251050000...
avec « 35 », on obtient 35155525251010101050000...
avec « 45 », on obtient 452010000...
avec « 65 », on obtient 65301500500000...
avec « 75 », on obtient 7535151555552525252510101010101010105000...
avec « 85 », on obtient 854020000...
avec « 95 », on obtient 954520201000...
avec « 51 », on obtient 51552510105000...
avec « 52 », on obtient 52102000...
avec « 53 », on obtient 5315351515555525252525101010101010101050...

avec « 54 », on obtient 54208000...
avec « 56 », on obtient 563018008000...
avec « 57 », on obtient 5735211510215500252500010101000...
avec « 58 », on obtient 584032006000...
avec « 59 », on obtient :

$$5945362015181200558820002540641600001020002446000000000000816240$$
$$00000000000861280000000000000004862160000000000000000324812260000...$$

Contrairement aux autres nombres, celui-ci ne se termine pas par une infinité de « 0 », mais le « 5 » a bel et bien disparu !

Proposition 33 ▶ Disparition des 5, 7 et 9

Les suites de Steinhaus ne contiennent plus de « 7 », « 9 » et « 5 » à partir d'un certain rang.

Je me suis amusé à considérer une variante de ces suites dont voici le principe :

- On choisit au hasard deux chiffres puis on les multiplie entre eux
- On place ensuite le résultat à droite du nombre obtenu en adjonction des deux chiffres initiaux
- On prend ensuite les deux derniers chiffres du nombre ainsi obtenu pour les multiplier entre eux. Le résultat est mis à droite.
- On réitère cela à l'infini

Avec « 64 » au départ, on a $6 \times 4 = 24$ d'où le nombre « 6424 ».
Ensuite, on fait $2 \times 4 = 8$, ce qui nous donne « 64248 ».
Puis, on fait $4 \times 8 = 32$, ce qui nous donne « 6424832 », etc.

Voici plusieurs exemples :

64248326122483261224832612248326 12 . . .
3721224832612248326122483261224832612 . . .
796318864248326122483261224832612248326 12 . . .
83248326122483261224832612248326 12 . . .
339271441663618864248326122483261224832612248326 12 . . .

J'ai alors remarqué que la séquence « 24832612 » revenait tôt ou tard dans les suites où « 5 » et « 0 » n'apparaissaient pas au début, à part la suite « 1111111... ».
Je me suis alors penché sur les « nombres déclencheurs » de cette séquence ; sur les exemples précédents, elles sont précédées tantôt de « 64 », tantôt de « 12 », ou bien de « 83 »,...

En fait, $24 = 6 \times 4 = 3 \times 8$ donc après 64, 46, 38 et 83, la séquence est nécessairement présente. Après « 21 » ou « 12 », il y a nécessairement un « 2 » donc il est obligatoire de trouver « 22 » donc ensuite un « 4 » puis un « 8 »,... et la fréquence est amorcée.

La suite de Prouhet-Thue-Morse 14

Dans un article de 1906, puis dans un autre de 1912, le mathématicien norvégien Axel THUE (1863 - 1922) remarque que toutes les séquences binaires de longueur supérieure ou égale à 4 contiennent nécessairement « un carré », c'est-à-dire deux blocs identiques consécutifs. Il se demande alors s'il est possible de trouver une séquence infinie de 3 lettres sans « carrés », puis s'il est possible de trouver une séquence binaire infinie qui ne contient pas « un cube », i.e. trois blocs identiques consécutifs, voire même s'il n'existe pas de chevauchement, i.e. pas de sous-blocs de la forme :

$$a \boxed{b} a \boxed{b} a$$

où $a \in \{0;1\}$ et b un bloc binaire. Pour réfléchir à cela, THUE utilise une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ultérieurement.
Plus tard, Marston MORSE, mathématicien anglais, s'intéressera aussi à cette suite.

Dans ce chapitre, nous ne verrons pas toutes les applications de cette suite ; je vous invite alors à consulter l'article de Jean-Paul ALLOUCHE et Jeffrey SHALLIT traitant de ce sujet.

Définition 30

On appellera suite de Prouhet-Thue-Morse (en Angleterre, « Prouhet » est enlevé de la dénomination), la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de façon récursive par :

$$\begin{cases} t_0 = 0 & \\ t_{2n} = t_n & \forall\, n \in \mathbb{N}^* \\ t_{2n+1} = 1 - t_n & \forall\, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Notons $s_k(n)$ la somme des chiffres du nombre n en base k.
Alors, pour tout entier naturel n, $s_2(2n) = s_2(n)$ et $s_2(2n+1) = s_2(n)+1$; on voit clairement ce qui se passe sur un exemple :

Exemple 17

Si $n = 19 = 2^4 + 2^1 + 1$, alors $s_2(19) = 3$ et $s_2(38) = s_2\left(2^5 + 2^2 + 2^1\right) = 3$.
Il y a autant de « 2 » dans la décomposition de n en base 2 que dans celle de $2n$.
Si $n = 19 = 2^4 + 2^1 + 1$, alors $s_2(19) + 1 = 4$ et $s_2(39) = s_2\left(2^5 + 2^2 + 2^1 + 1\right) = 4$.
On ajoute $1 = 2^0$, donc un chiffre en plus dans l'écriture de $2n+1$ en base 2.

Proposition 34

La suite de Prouhet-Thue-Morse définie précédemment est égale à la suite $(s_2(n) \mod 2)_{n\in\mathbb{N}}$.

En effet, au rang $n = 0$, on constate que c'est le cas puis, en supposant que pour n quelconque, on a $t_{2n} = t_n = s_2(n) \mod 2$, alors :

$$\begin{aligned} t_{2n+1} &\equiv s_2(2n+1) \mod 2 \\ &\equiv s_2(n)+1 \mod 2 \\ &\equiv 1-t_n \mod 2 \end{aligned}$$

■

On a alors le résultat suivant :

Proposition 35

En adoptant les notations précédents, on a :

$$\prod_{k\geqslant 0}\left(1-x^{2^k}\right) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^{t_k}x^k$$

Le premier grand théorème concernant ces suites est le suivant :

Théorème 15 ▶ Théorème (de Thue)

La suite de Prouhet-Thue-Morse est sans chevauchement.

Posons, pour tout entier naturel n strictement positif, v_n le nombre de « 1 » entre la n-ième et $(n+1)$-ième occurrence de « 0 » dans la suite de Prouhet-Thue-Morse.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ commence alors par :

$$2,1,0,2,0,1,2,1,0,1,2,\cdots$$

Thue prouva en corollaire du théorème précédent que cette suite était sans « carrés ». Ce travail était le point de départ d'une importante branche de la combinatoire, appelée maintenant combinatoire des mots. À cette époque, Thue n'avait pas idée de l'utilité de ce qu'il venait de trouver, même s'il sentait que cela était important au point d'y consacrer un peu de son temps. Les articles de Thue apparaissaient dans un obscur journal norvégien et, très longtemps, furent largement ignorés ou ne furent pas appréciés. Ces résultats furent redécouverts plus tard par différents auteurs, dont Marston Morse.

Bien qu'il y ait une multitude de suites binaires sans chevauchement, la suite de Prouhet-Thue-Morse est qualifiée grossièrement d'exemple « canonique ».
Par exemple, si en plus d'exiger le non-chevauchement, nous ajoutons d'autres conditions, nous trouverons souvent que la seule suite possible est celle de Prouhet-Thue-Morse ou une de ses variantes. Comme par exemple le théorème suivant :

Théorème 16 ▶ Théorème de Berstel

La plus grande suite binaire lexicographique sans chevauchement commençant par « 0 » est la suite de Prouhet-Thue-Morse.

Théorème que J. Currie, Jean-Paul Allouche et Jeffrey Shallit généralisèrent par :

Théorème 17 ▶ Théorème de Currie-Allouche-Shallit

La plus grande suite binaire lexicographique sans chevauchement est la suite « $110110(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ », où $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite de Prouhet-Thue-Morse.

Dans un article de 1929, le champion d'échecs Machgielis (Max) EUWE (1901-1981) découvre la suite de Prouhet-Thue-Morse de façon indépendante et l'utilise dans un problème d'échecs. Il prouve, en utilisant la propriété de cette suite concernant le non-chevauchement de « cubes », qu'une infinité de jeux (aux échecs) sont possibles si la même suite de mouvements arrive trois fois de façon consécutive.
Plus tard, Morse redécouvre cette même technique.

Morphismes de monoïdes libres

Soit $\mathscr{A}$ un alphabet, i.e. un ensemble fini de symboles ; l'ensemble des mots de $\mathscr{A}$ muni d'une opération de concaténation sera noté $\mathscr{A}^*$: c'est le monoïde libre généré par $\mathscr{A}$.
L'application :

$$\sigma : \mathscr{A}^* \longrightarrow \mathscr{A}^*$$

est appelé *morphisme* si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathscr{A}^* \times \mathscr{A}^*,\ \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y).$$

Il sera *uniforme* si, pour tout élément de $\mathscr{A}^*$, son image a le même nombre de symboles.

Proposition 36

Soit μ le morphisme défini sur $\{0;1\}$ par $\mu(0) = 01$ et $\mu(1) = 10$.
Alors, la suite de Prouhet-Thue-Morse est l'unique point fixe de μ qui commence par 0.

Pour démontrer ceci, notons avant tout que si une suite infinie est un point fixe de μ et commence par 0, alors elle doit commencer par $\mu(0) = 01$. Ainsi, elle doit commencer par $\mu(01) = \mu(0)\mu(1)$, soit $\mu(\mu(0)) = \mu^2(0)$. Nous voyons alors que de fil en aiguille, on montre qu'elle doit commencer par $\mu^k(0)$, k étant un entier naturel. Ceci prouve l'unicité.

Comme $\mu(0)$ commence par 0, $\mu^{k+1}(0)$ commence par $\mu^k(0)$ quel que soit l'entier naturel k. Ainsi, la suite de mots $\left(\mu^k(0)_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une suite infinie notée par exemple $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, point fixe de μ.

Maintenant, pour $x \in \{0;1\}$, $\mu(x) = x(1-x)$. Comme $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point fixe de μ, on a $z_{2n} = z_n$ et $z_{2n+1} = 1 - z_n$, pour tout entier naturel n, ce qui prouve que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Prouhet-Thue-Morse.

Le théorème de Séébold prouve, en outre, que si une suite binaire sans chevauchement est un point fixe d'un morphisme non trivial, alors cette suite est celle de Prouhet-Thue-Morse ou sa complémentaire
(1001011001101001...).
Ainsi, il n'est pas possible de construire une autre suite binaire sans chevauchement générée par morphisme. ■

Le problème de Prouhet-Tarry-Escott

La suite de Prouhet-Thue-Morse apparaît implicitement dans un article de Prouhet en 1851. Prouhet s'intéressa à un problème qui sera étudié 50 ans plus tard par TARRY et ESCOTT, et qui est maintenant connu sous le nom de *Problème de Prouhet-Tarry-Escott*.
Prouhet se posa la question suivante : est-il possible de trouver une partition de l'ensemble $[\![0; 2^n - 1]\!]$ en deux ensembles distincts I et J tels que :

$$\sum_{i \in I} i^k = \sum_{j \in J} j^k \qquad , \qquad k \in [\![0; p]\!].$$

En prenant $0^0 = 1$, le cas où $k = 0$ montre que $|I| = |J|$. Prouhet prouva qu'une telle partition était possible si $n = p + 1$.

Proposition 37

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Prouhet-Thue-Morse.
Posons $I = \{i \in [\![0; 2^n - 1]\!],\, t_i = 0\}$ et $J = \{j \in [\![0; 2^n - 1]\!],\, t_j = 1\}$. Alors :

$$\forall\, k \in [\![0; n-1]\!],\ \sum_{i \in I} i^k = \sum_{j \in J} j^k.$$

Exemple 18

Si l'on prend $n = 4$, alors $[\![0; 2^n - 1]\!] = [\![0; 15]\!]$ et :

$t_0 = 0$	$t_6 = 0$	$t_{12} = 0$
$t_1 = 1$	$t_7 = 1$	$t_{13} = 1$
$t_2 = 1$	$t_8 = 1$	$t_{14} = 1$
$t_3 = 0$	$t_9 = 0$	$t_{15} = 0$
$t_4 = 1$	$t_{10} = 0$	
$t_5 = 0$	$t_{11} = 1$	

D'où :

$$i \in \{0; 3; 5; 6; 9; 10; 12; 15\} \qquad \text{et} \qquad j \in \{1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14\}$$

, et donc :

$$\forall\, k \in \{0; 1; 2; 3\},\ 0^k + 3^k + 5^k + 6^k + 9^k + 10^k + 12^k + 15^k = 1^k + 2^k + 4^k + 7^k + 8^k + 11^k + 13^k + 14^k.$$

Il étudia le problème plus général suivant : trouver une partition de $[\![0; q^n - 1]\!]$ en q ensembles $I_1, \cdots, I_q$ tels que les q sommes :

$$\sum_{i \in I_j} i^k \qquad , \qquad j \in [\![0; q]\!], \quad k \in [\![0; n-1]\!]$$

ne dépendent pas de j. Il donna la solution suivante :

$$\forall\, q \geqslant 2,\ T_q(n) \equiv s_q(n) \mod q \quad ; \quad I_j = \{i \in [\![0; q^n - 1]\!],\, T_q(i) = j\}.$$

Un produit infini

Woods s'interrogea sur la limite de la suite :

$$\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \quad ; \quad \frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}}{\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}} \quad ; \cdots$$

Robins prouva que cette limite était égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Plus précisément :

Proposition 38

Soit $\varepsilon_n = (-1)^{t_n}$, où $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Prouhet-Thue-Morse. Alors :

$$\prod_{n\geqslant 0}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\varepsilon_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En effet, si l'on pose :

$$P = \prod_{n\geqslant 0}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\varepsilon_n} \qquad \text{et} \qquad Q = \prod_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{\varepsilon_n}$$

alors,

$$\begin{aligned} PQ &= \frac{1}{2}\prod_{n\geqslant 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\varepsilon_n} \\ &= \frac{1}{2}\prod_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{\varepsilon_{2n}}\prod_{n\geqslant 0}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\varepsilon_{2n+1}} \\ &= \frac{1}{2}\prod_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{\varepsilon_n}\left(\prod_{n\geqslant 0}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\varepsilon_n}\right)^{-1} \quad \text{car } \varepsilon_{2n} = \varepsilon_n \text{ et } \varepsilon_{2n+1} = -\varepsilon_n \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q}{P} \text{ (les produits convergent d'après le théorème d'Abel)} \end{aligned}$$

Comme $Q \neq 0$, cela signifie :

$$P^2 = \frac{1}{2},$$

soit :

$$P = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

Partition des entiers naturels

Soit A le plus petit ensemble d'entiers naturels tel que « 0 » et « 1 » appartiennent à A et tel que pour tout entier naturel n différent de 0 appartenant à A, $2n \notin A$:

$$A = \{0; 1; 3; 4; 5; 7; 9; 11; 12; 13; 15; 16; 17; 19; 20; 21; 23; \cdots\}$$

Il n'est pas difficile de voir que A et $2A = \{2a | a \in A\}$ forment une partition de $\mathbb{N}$.

Voici un théorème dû à Allouche, Arnold, Berstel, Brlek, Jockusch, Plouffe et Sagan :

Théorème 18

Soit $A = \{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ et soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$z_n = 0^{a_1-a_0}1^{a_2-a_1}0^{a_3-a_2}\cdots 0^{a_{2n+1}-a_{2n}}1^{a_{2n+2}-a_{2n+1}}\cdots$$

où l'on convient de noter :

$$c^j = \underbrace{ccc\cdots cc}_{j\text{ fois}} \qquad , \qquad c \in \{0;1\}.$$

Alors, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Prouhet-Thue-Morse.

Une série formelle

Le nombre de Prouhet-Thue-Morse $\sum\limits_{n\geqslant 0} t_n 2^{-n}$ est transcendant comme l'a prouvé Mahler. Mais que peut-on dire de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} t_n X^{-n}$? Dans $\mathbb{Q}[X]$, elle est transcendante comme on peut le lire dans l'ouvrage de DEKKING « Transcendance du nombre de Thue-Morse », mais modulo 2, nous avons le résultat suivant :

Proposition 39

Soit $F(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} t_n X^{-n}$ un élément de $\mathbb{F}_2\left[\left[X^{-1}\right]\right]$. Alors, $F(x)$ est quadratique dans $\mathbb{F}_2[X]$. Plus précisément :

$$(1+X)^3\left(F(X)\right)^2 + X(1+X)^2F(X) + X^2 = 0.$$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
F(X) &= \sum_{n\geqslant 0} t_n X^{-n} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} t_n X^{-2n} + X^{-1}\sum_{n\geqslant 0}(1+t_n)X^{-2n} \\
&= \left(F(X)\right)^2 + X^{-1}\left(\frac{X^2}{1+X^2} + \left(F(X)\right)^2\right) \\
&= \left(\frac{1+X}{X}\right)\left(F(X)\right)^2 + \frac{X}{1+X^2} \\
&= \left(\frac{1+X}{X}\right)\left(F(X)\right)^2 + \frac{X}{(1+X)^2}
\end{aligned}$$

D'où :

$$X(1+X)^2F(X) = (1+X)^3\left(F(X)\right)^2 + X^2\ ,$$

et donc :

$$(1+X)^3\left(F(X)\right)^2 + X(1+X)^2F(X) + X^2 = 0. \qquad \blacksquare$$

On démontre aussi que le développement en fraction continue de $F(X)$ est :

$$F(X) = \left[0,X+1,\overline{X,X,X^3+X,X}\right].$$

Les β-expansions

Définition 31

Une β-expansion d'un nombre réel x est une décomposition de la forme :

$$x = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n \beta^{-n} \qquad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

À ce propos, voici un théorème dû à Komornik et Loreti [voir l'ouvrage *Unique developments in non-integer base* (1998)] :

Théorème 19 ▶ Théorème de Komornik-Loretti

Il existe un plus petit nombre $\beta \in \{0;1\}$ pour lequel il existe une β-expansion de « 1 » de la forme :

$$1 = \sum_{n\geqslant 1} t_n \beta^{-n}$$

où $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Prouhet-Thue-Morse.
De plus, $\beta = 1{,}787\,231\,65$.

15 Un air de suites

En analyse, il existe un outil pour calculer l'aire du domaine délimité par deux courbes et deux droites verticales : les intégrales. Le problème majeur de cet outil réside dans la recherche des primitives des fonctions associées aux courbes en question. En effet, il n'est pas toujours facile de les trouver, voire impossible dans certains cas, comme par exemple pour la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Ainsi, il nous faut faire appel à d'autres techniques. Et c'est ici que prennent place les suites numériques... Il existe plusieurs méthodes pour trouver l'aire cherchée. Je vais ici vous exposer les principales.

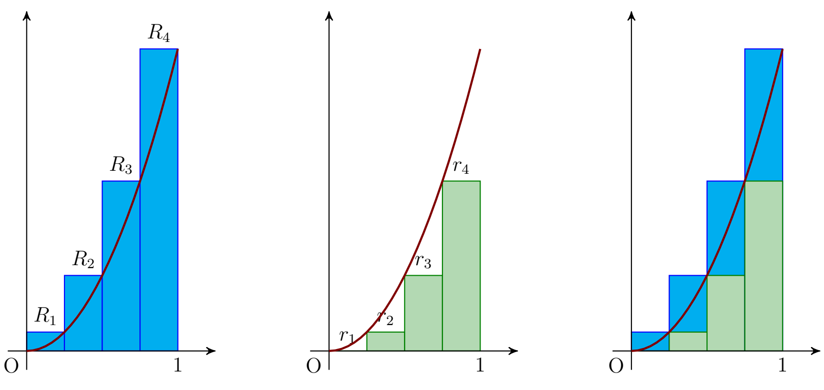
La méthode des rectangles

C'est sans doute la plus archaïque des méthodes, mais il faut en passer par là pour comprendre les autres plus aisément.
Prenons une fonction f continue sur un intervalle fermé $I = [a\,;b]$, puis divisons I en n subdivisions identiques :

$$s_k = \left[a + (k-1)\frac{b-a}{n}; a + k\frac{b-a}{n}\right] \qquad , \qquad k \in [\![0; n-1]\!].$$

Ces intervalles ont tous une amplitude de $\dfrac{b-a}{n}$.

Les s_k vont nous servir de bases pour construire des rectangles. Prenons maintenant la suite de rectangles R_k, $k \in [\![1; n]\!]$, de base s_k et de hauteur $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$, puis la suite de rectangles r_k, de base s_k et de hauteur $f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right)$.
Nous obtenons ainsi quelque chose qui ressemble à cela :



Ici, j'ai pris $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $I = [0\,;1]$, en prenant $n = 4$.

On peut constater d'une part que l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (que l'on note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$) est encadrée par les sommes des aires des R_k et r_k, d'autre part que lorsque n tend vers l'infini, les rectangles tendent à devenir des segments et donc que R_k tend à se confondre avec r_k.

Proposition 40

En notant $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on a :

$$\mathscr{A} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{(limite des Sommes de Riemann).}$$

Appliquons cette dernière formule à la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $[0\,;1]$:

$$\mathscr{A} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{n^2}}.$$

À l'aide d'un logiciel de calculs, on trouve :

$$\mathscr{A} \approx 0{,}746\,718\,772\,573\,37.$$

De plus, le même logiciel nous donne :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746\,824\,133.$$

On constate alors que la précision n'est pas extraordinaire. Ceci est dû à la proposition suivante :

Proposition 41 ▶ Majoration de l'erreur

Soit f une fonction intégrale sur $[a\,;b]$, intervalle subdivisé équitablement en n, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \frac{b-a}{n}\big|f(b) - f(a)\big|.$$

Notons $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et considérons le cas où f est croissante sur $[a\,;b]$. Alors,

$$\forall\, x \in [x_k\,;x_{k+1}],\ f(x_k) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{k+1})\ ,$$

soit, en intégrant cet encadrement sur $[x_k\,;x_{k+1}]$:

$$\frac{b-a}{n} f(x_k) \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{n} f(x_{k+1}).$$

En utilisant la relation de Chasles sur les intégrales, on a alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$$

soit :

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \frac{b-a}{n}\big[f(b) - f(a)\big].$$

Dans le cas où f est décroissante sur $[a\,;b]$, on applique ce dernier résultat à $-f$:

$$0 \leqslant -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \frac{b-a}{n}\big[f(a)-f(b)\big].$$

Dans les deux cas, en prenant la valeur absolue du terme central, on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \frac{b-a}{n}\big|f(b)-f(a)\big|. \qquad \blacksquare$$

On peut même aller plus loin en écrivant :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ \mathrm{d}x - (x_{k+1}-x_k)f(x_k)\right] \qquad (1)\end{aligned}$$

Notons alors $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
Le théorème de Taylor-Lagrange stipule alors qu'il existe un $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) &= F(a) + F'(a)(b-a) + \frac{F''(a)}{2}(b-a)^2\\ &= f(a)(b-a) + \frac{f'(c)}{2}(b-a)^2.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, il existe un $c_k \in \,]x_k\,;x_{k+1}[$ tel que :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ \mathrm{d}x - (x_{k+1}-x_k)f(x_k) = \frac{f'(c_k)}{2}(x_{k+1}-x_k)^2.$$

Ainsi, l'égalité (1) donne :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{f'(c_k)}{2}(x_{k+1}-x_k)^2\right].$$

Or, $x_{k+1}-x_k = \dfrac{b-a}{n}$ donc on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{f'(c_k)}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right]\\ &= \frac{(b-a)^2}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_k)\,. \qquad (2)\end{aligned}$$

Supposons que f' soit continue sur $[a\,;b]$. Alors, f' est bornée sur $[a\,;b]$ et on a :

$$\forall\, k \in [\![0;n-1]\!],\ m \leqslant f'(c_k) \leqslant M$$

et donc :

$$m \times n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f'(c_k) \leqslant M \times n$$

ou encore :

$$m \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(c_k) \leqslant M.$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $c \in]a\,;b[$, tel que :

$$f'(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(c_k).$$

L'égalité (2) donne alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c).$$

Comme f' est supposée bornée, elle admet une borne supérieure et on peut donc écrire :

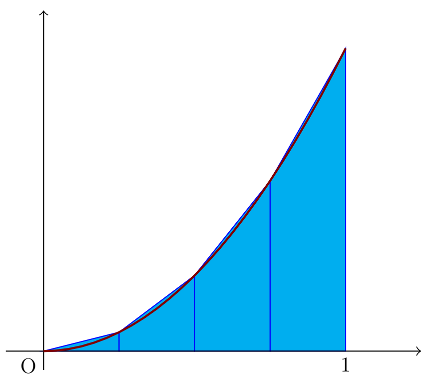
Théorème 20 ▶ Majoration de l'erreur dans la méthode des rectangles

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{x \in [a\,;b]} |f'(x)|.$$

La méthode des trapèzes

La base de cette méthode est la même que la méthode des rectangles, mais au lieu de construire deux séries de rectangles, on va construire une seule série de trapèzes comme l'illustre le schéma suivant :



Remarquons que plus la concavité (ou convexité) de la courbe est importante, plus les trapèzes vont coller à la courbe.

Qui plus est, plus la hauteur des trapèzes tend vers 0, plus la somme de leur aire tend vers l'aire du domaine considéré.

Proposition 42

En notant $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, on a :

$$\mathscr{A} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

Pour $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $[0\,;1]$, avec cette dernière formule, on obtient à l'aide d'un logiciel de calculs :

$$\mathscr{A} \approx 0{,}746\,824\,125\,999\,85$$

ce qui est largement mieux que la première méthode.

Pour ce qui est de l'erreur commise, on peut s'inspirer de ce qui a été fait pour la méthode des rectangles, et dire qu'il existe un réel $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}\big[f(a) + f(b)\big] = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(c)$$

en supposant que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
On en déduit alors le théorème suivant :

Théorème 21 ▶ Majoration de l'erreur commise par la méthode des trapèzes

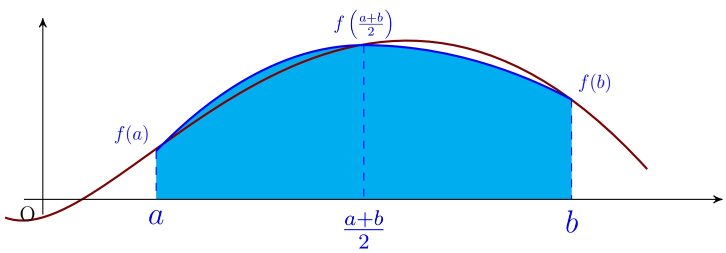
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;b]$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_k) + f(x_{k+1})\big) \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a\,;\,b]} |f''(x)|.$$

La vitesse de convergence de cette méthode est donc meilleure que cette de la méthode des rectangles.

La méthode de Simpson

Cette méthode consiste à approcher la courbe par la courbe d'un polynôme quadratique au lieu d'un polynôme affine comme l'illustre le schéma suivant :



Le polynôme quadratique P qui approche f doit être tel que :

$$\begin{cases} P(a) = f(a) \\ P\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ P(b) = f(b) \end{cases}$$

On arrive alors à montrer le résultat suivant :

Proposition 43

En notant $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on a :

$$\mathscr{A} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{2n}\right)+2\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

Concernant l'erreur commise, on peut montrer qu(il existe un $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] = -\frac{(b-a)^5}{2\,880} f^{(4)}(c)$$

ce qui implique le théorème suivant :

Théorème 22 ▶ Majoration de l'erreur commise par la méthode de Simpson

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;b]$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)+f(x_{k+1})\right]\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2\,880 n^4}\sup_{x\in[a\,;\,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

La convergence est donc plus rapide qu'avec les deux autres méthodes.

16 Résolution d'équations

Résoudre des équations, c'est monnaie courante en mathématiques. Mais il est aussi fréquent d'avoir à résoudre des équations dont la valeur des solutions ne peut pas être trouvée de façon précise. C'est ainsi que nous devons faire appel à des techniques faisant intervenir des suites. Je vais ici vous exposer quelques techniques, celles qui me semblent incontournables, en commençant par une méthode « basique » mais qui a son importance.

La dichotomie

Algorithme 10: Dichotomie sur une fonction décroissante

Entrées
- $a \in \mathbb{R}$
- $b \in \mathbb{R}$
- $m \in \mathbb{R}$
- $t \in \{0; 1\}$
- $n \in \mathbb{N}$

Traitement
```
t ← 0
Saisir a, b et n
Tant que t = 0 ou |b − a| ⩾ 10^(−n)
    m ← (a+b)/2
    Si f(m) = 0 alors
        t ← 1 (on a trouvé la solution)
    sinon
        Si f(m) > 0 alors
            a ← m (Changer la condition en : f(m) < 0 pour f croissante)
        sinon
            b ← m
        Fin du Si
    Fin du Si
Fin du Tant que
```

Sortie
```
Afficher a et b
```

Dichotomie vient du grec « couper en deux ».

Supposons que l'on dispose d'une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a\,;b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors, il existe un unique réel α dans I tel que $f(\alpha) = 0$ (c'est le *théorème de la bijection*, corollaire du *théorème des valeurs intermédiaires.*).

Coupons alors I en deux intervalles de même amplitude : $I_1^{(1)} = \left[a\,;\frac{a+b}{2}\right[$ et $I_2^{(1)} = \left[\frac{a+b}{2}\,;b\right]$.

Si $\alpha = \dfrac{a+b}{2}$, il n'y a rien à faire : on a trouvé la solution ! Mais dans le cas contraire, on regarde dans quel intervalle se trouve α (est-ce $I_1^{(1)}$ ou $I_2^{(1)}$?), puis on fait à cet intervalle ce que l'on a fait à I. On réitère ceci autant de fois que nécessaire pour avoir un encadrement de α assez fin. C'est ce que fait l'algorithme 10.

Cet algorithme permet de saisir les valeurs de a et b, définissant I, ainsi que la précision souhaitée (10^{-n}).

À chaque étape, l'amplitude est multipliée par $\dfrac{1}{2}$; ainsi, la suite représentant l'amplitude des intervalles $I^{(k)}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

Proposition 44

Si l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[a\,;b]$ et si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représente la suite des intervalles obtenus par dichotomie, alors, en notant $I_n = [a_n\,;b_n]$, $|b_n - a_n|$ représente une valeur approchée de α et l'erreur commise est alors égale à $\dfrac{1}{2^n}(b-a)$, pour tout entier naturel n.

En effet, par construction, $|b_{n+1} - a_{n+1}| = \dfrac{1}{2}\,|b_n - a_n|$. Donc,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

d'après les formules vues au chapitre des suites géométriques.
Or,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, \alpha \in [a_n\,;b_n]\ ,$$

donc l'erreur commise à l'étape n est inférieure à l'amplitude de I_n, soit à $\dfrac{1}{2^n}(b-a)$. ■

Exemple 19 ▶ Premières étapes de la dichotomie

$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \sqrt{x}$			
Etape n	$I_n^{(k)}$	**Calculs intermédiaires**	**Erreur ε_n**
0	$[0\,;1]$	$f(0) = 1$	
1	$\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$	$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0{,}1$	$\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{2}$
2	$\left[\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right]$	$f\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0{,}28$	$\varepsilon_2 \leqslant \frac{1}{4}$
3	$\left[\frac{3}{8}\,;\frac{1}{2}\right]$	$f\left(\frac{3}{8}\right) \approx 0{,}07$	$\varepsilon_3 \leqslant \frac{1}{8}$
4	$\left[\frac{3}{8}\,;\frac{7}{16}\right]$	$f\left(\frac{7}{16}\right) \approx -0{,}02$	$\varepsilon_4 \leqslant \frac{1}{16}$
5	$\left[\frac{13}{32}\,;\frac{7}{16}\right]$	$f\left(\frac{13}{32}\right) \approx 0{,}03$	$\varepsilon_5 \leqslant \frac{1}{32}$
6	$\left[\frac{27}{64}\,;\frac{7}{16}\right]$	$f\left(\frac{27}{64}\right) \approx 0{,}006$	$\varepsilon_6 \leqslant \frac{1}{64}$

Comme on peut le constater sur cet exemple, la convergence est assez lente. En effet, si l'on veut une erreur inférieure à 10^{-p}, alors il faut que :

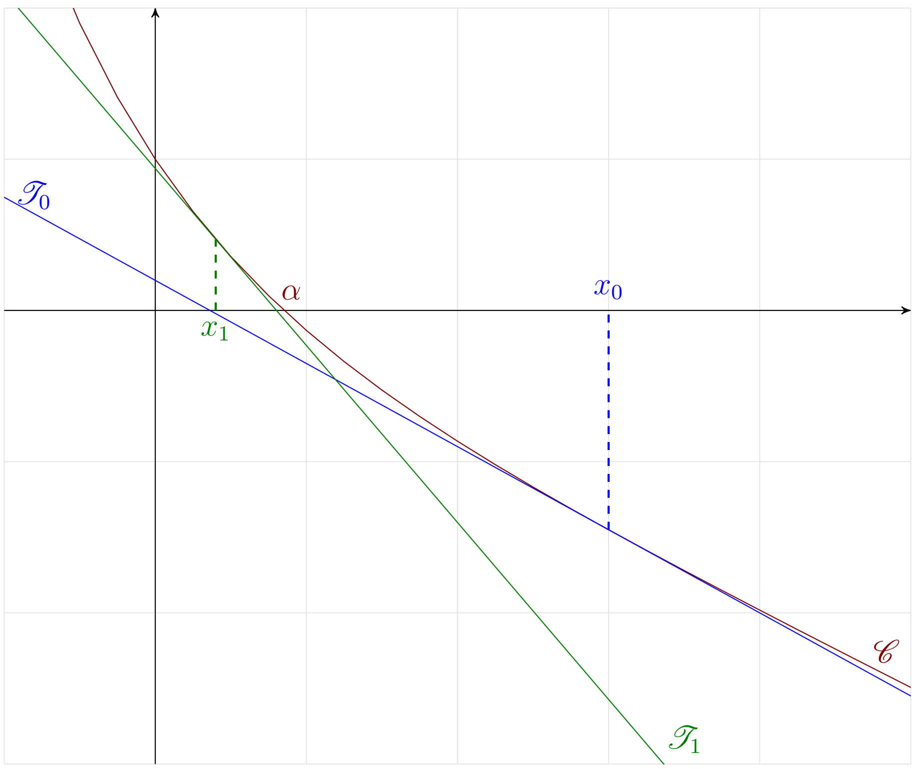
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n}(b-a) \leqslant 10^{-p} &\iff \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{10^{-p}}{b-a} \\
&\iff 2^n \geqslant 10^p(b-a) \\
&\iff n\ln 2 \geqslant \ln 10^p(b-a) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln 10^p(b-a)}{\ln 2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, sur la fonction de notre exemple, pour avoir une erreur inférieure à 10^{-5}, il aurait fallu avoir $n \geqslant \dfrac{\ln 10\,000}{\ln 2}$, soit $n = 14$.

La méthode de Newton

L'idée repose sur une observation très pertinente...
Considérons une fonction strictement croissante (par exemple) et continue sur un intervalle $I = [a\,;b]$, et telle que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur I.
Considérons maintenant la tangente à la courbe représentative de f en $x_0 = b$; elle coupe l'axe des abscisses en x_1.
Considérons alors la tangente à la même courbe en x_1 ; elle coupe l'axe des abscisses en x_2. Etc.

Regardons sur un schéma ce que cela donne :



Le point d'intersection des tangentes $\mathscr{T}_0$, $\mathscr{T}_1$,... avec l'axe des abscisses se rapproche du point d'intersection de la courbe avec ce même axe.

Si on note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite représentant l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{T}_n$ avec l'axe des abscisses, alors elle semble converger vers α.

L'équation de la tangente en x_n est :

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) \ ,$$

d'où :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Exemple 20

En appliquant cette suite à la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \sqrt{x}$, on a :

$$x_0 = 1$$

$$x_1 \approx 0{,}271\,649\,346$$

$$x_2 \approx 0{,}411\,602\,333$$

$$x_3 \approx 0{,}426\,183\,639$$

$$x_4 \approx 0{,}426\,302\,743$$

$$x_5 \approx 0{,}426\,302\,751$$

On constate sur cet exemple que la convergence est nettement plus rapide qu'avec la dichotomie. D'ailleurs, x_5 est la valeur approchée de α à 10^{-9} près.

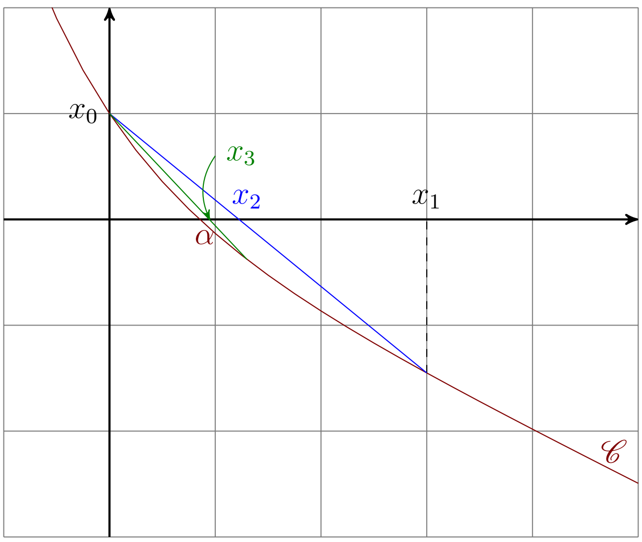
Cette méthode a tout de même un inconvénient : il est nécessaire de calculer la dérivée de la fonction et il faut que cette dérivée soit définie en les x_n (dans notre exemple, x_0 devait être différent de 0 par exemple afin de pouvoir commencer les calculs).

Dans le cas où l'on ne veut pas faire intervenir la dérivée, il existe une méthode inspirée de la méthode de Newton.

La méthode de la sécante

On remplace ici $f'(x_n)$ par $\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$, ce qui donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \qquad , \qquad x_0 = a,\ x_1 = b.$$



C'est donc une suite récurrente d'ordre 2, et non d'ordre 1 contrairement à la méthode de Newton).

Exemple 21

Appliquons cette méthode à la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \sqrt{x}$, comme dans les exemples précédents :

$$x_0 = 0; x_1 = 1 \qquad x_4 \approx 0{,}431\,465\,972$$
$$x_2 \approx 0{,}612\,699\,837 \qquad x_5 \approx 0{,}426\,451\,673$$
$$x_3 \approx 0{,}374\,268\,958 \qquad x_6 \approx 0{,}426\,302\,331$$
$$x_7 \approx 0{,}426\,302\,751$$

L'ordre de convergence de cette méthode est égal au nombre d'or, c'est-à-dire moindre que la méthode de Newton.

La méthode de la fausse position, ou *regula falsi*

C'est une méthode qui ressemble beaucoup à la méthode de la sécante, si ce n'est que l'on fait ici un test pour savoir dans quel intervalle se trouve la solution α de l'équation $f(x) = 0$.
On commence par tracer la corde reliant les points de la courbe d'abscisse a et b ; on note x_1 l'abscisse du point d'intersection de cette corde avec l'axe des abscisses. C'est ici que l'on regarde dans quel intervalle appartient α.
Si $f(a)f(x_1) > 0$, alors on pose $a_1 = x_1$ et $b_1 = b$. Sinon, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = x_1$. Et on continue ainsi.
Autant vous dire que cette méthode est plus compliquée à mettre en œuvre que les deux précédentes. De plus, elle converge légèrement plus lentement que la méthode de la sécante (la vitesse de convergence est dite *super-linéaire*).

On pourrait dire que c'est un mélange entre la dichotomie et la méthode de la sécante.

La méthode de Müller

Voici une autre méthode dérivée de la méthode de la sécante.
Dans cette dernière, on faisait une interpolation linéaire de la fonction. L'idée ici sera donc de passer à une interpolation quadratique.

En posant :

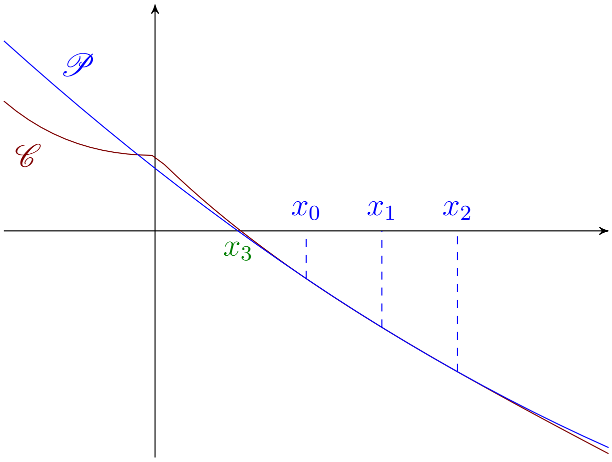
$$\begin{aligned}
q &= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \ , \\
A &= qf(x_n) - q(q+1)f(x_{n-1}) + q^2 f(x_{n-2}) \ , \\
B &= (2q+1)f(x_n) - (q+1)^2 f(x_{n-1}) + q^2 f(x_{n-2}) \ , \\
C &= (q+1)f(x_n) \ ,
\end{aligned}$$

on construit la suite définie par le terme :

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - x_{n-1}) \frac{2C}{\max\left(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right)}.$$

Cette méthode nécessite 3 premiers termes, si possible proches de la solution. Sa vitesse de convergence est égale au nombre d'argent, limite du rapport de deux termes de la suite de tribonacci (voir chapitre sur les suites linéaires), soit à peu près 1,84.

Voici un schéma qui illustre ce qui se passe à la première étape :



La fonction f a pour courbe représentative $\mathscr{C}$, la courbe représentative $\mathscr{P}$ du polynôme du second degré qui doit approcher f est dessiné en bleu.
À l'étape 1, on cherche $P(x) = ax^2 + bx + c$ tel que :

$$\begin{cases} P(x_0) = f(x_0) \\ P(x_1) = f(x_1) \\ P(x_2) = f(x_2) \end{cases}$$

Cela revient donc à résoudre un système linéaire où les inconnues sont a, b et c.
x_3 est défini par : $P(x_3) = 0$.

La particularité de cette méthode est que l'on peut calculer les solutions complexes de l'équation $f(x) = 0$.

Suites diverses 17

J'ai regroupé dans ce chapitre diverses suites qui ne méritaient pas vraiment qu'on leur consacre un chapitre entier bien qu'intéressantes et quelques fois ludiques.

Moyenne arithmético-géométrique

Nous allons ici considérer deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} a_0\in\mathbb{R}_+^* \\ a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} b_0\in\mathbb{R}_+^* \\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\end{cases}$$

Proposition 45 ▶ Adjacence des suites (a_n) et (b_n)

Les deux suites sont adjacentes.

Avant toute chose, soyons convaincus du fait que ces deux suites sont positives (je ne m'attarderai pas sur la démonstration qui peut être faite par récurrence).

Pour tout entier naturel n non nul,

$$\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)^2=a_n+b_n-2\sqrt{a_nb_n}.$$

Or,

$$\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)^2\geqslant 0\ ,$$

d'où :

$$a_n+b_n\geqslant 2\sqrt{a_nb_n}\ .$$

On en déduit alors que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\ .$$

De plus,

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2-a_n^2&=a_nb_n-a_n^2\\ &=a_n\left(b_n-a_n\right)>0.\end{aligned}$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Ensuite,

$$\begin{aligned} b_{n+1}-b_n&=\frac{a_n+b_n}{2}-b_n\\ &=\frac{a_n-b_n}{2}<0.\end{aligned}$$

Ainsi, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$b_{n+1} - a_{n+1} - \frac{1}{2}(b_n - a_n) = a_n - a_{n+1} \leqslant 0.$$

Donc :

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(b_n - a_n).$$

On en déduit alors :

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0).$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

On en déduit alors que les suites sont bien adjacentes.
Elles ont donc une limite commune. C'est cette limite, que l'on note $M(a_0\,;b_0)$ que l'on appelle moyenne arithmético-géométrique de a_0 et b_0. ■

Proposition 46 ▶ Intégrale elliptique

En posant :

$$I(a_0\,;b_0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a_0^2)(t^2+b_0^2)},$$

on a :

$$I(a_0\,;b_0)\,M(a_0\,;b_0) = \frac{\pi}{2}.$$

En posant $f(x) = M(1\,;x)$,

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln x} \qquad ; \qquad f(x) \underset{0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln x}.$$

De plus,

$$\pi = 2\sqrt{2} \times \frac{f^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

où $f^3 = f \circ f \circ f$.

On démontre ensuite que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} p_0 = 2+\sqrt{2} \\ p_n = p_{n-1} \times \dfrac{1+y_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1+z_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \end{cases} \quad ; \quad y_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)},\ z_n(x) = \frac{v_n'(x)}{u_n'(x)}$$

converge vers π, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites de fonctions définies respectivement par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant $a_0 = 1$ et $b_0 = x$.

L'intérêt d'une telle suite est sa convergence très rapide.
En effet, p_{20} approche π à moins de $10^{-1\,000\,000}$ près !

Je ne ferai pas d'étude poussée de cette moyenne car ce n'est pas l'objet de cet ouvrage. Cependant, le lecteur pourra se reporter au sujet du CAPES externe de mathématiques 1995 ainsi qu'aux nombreuses corrections élaborées.

Suites aliquotes

Définition 32 ▶ Suite aliquote d'un entier naturel k

Soit k un entier naturel. On note $s(k)$ la somme de ses diviseurs (lui-même non compris). On définit alors la suite aliquote de k $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = k \\ a_{n+1} = s(a_n) \end{cases}$$

Exemple 22

Prenons $k = 12$.

$a_1 = s(12) = 1+2+3+4+6 = 16$
$a_2 = s(16) = 1+2+4+8 = 15$
$a_3 = s(15) = 1+3+5 = 9$
$a_4 = s(9) = 1+3 = 4$
$a_5 = s(4) = 1+2 = 3$
$a_6 = s(3) = 1$
$a_7 = s(1) = 0$
La suite s'arrête ici.

Quand k est un grand nombre, il est quelques fois difficile de calculer la somme des diviseurs. En théorie des nombres, on montre que si

$$k = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}$$

est la décomposition en produits de facteurs premiers de k, alors :

$$s(k) = \prod_{j=1}^{n} \frac{p_j^{a_j+1} - 1}{p_j - 1} - k$$

Ainsi, par exemple,

$$s(12) = \frac{2^3-1}{2-1} \times \frac{3^2-1}{3-1} - 12 = 16.$$

Quelques fois, il arrive que la suite ne s'arrête pas... voire qu'elle tourne en boucle, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $s^{p+1}(k) = k$. Dans ce cas, on dit que la suite aliquote est fermée et compte p maillons.

Définition 33 ▶ Nombre sociable

On dit d'un entier naturel a que c'est un nombre sociable d'ordre n si sa suite aliquote est fermée et compte n maillons.

Le premier nombre sociable fut découvert par le mathématicien français Paul Poulet en 1918 (il s'agit du nombre 12 496, qui est un nombre sociable d'ordre 5). En 1970, le mathématicien français Henri Cohen en découvre sept d'ordre 4.

Suite de Syracuse

Définition 34

On définit la **suite de Syracuse** (appelée aussi **suite de grêlons**) par son premier terme $s_0 \in \mathbb{N}^*$ et :

$$\begin{cases} s_{n+1} = \dfrac{s_n}{2} & \text{si } s_n \in 2\mathbb{Z} \\ s_{n+1} = 3s_n + 1 & \text{si } s_n \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

C'est à l'université de Syracuse, aux États-Unis, que l'on définit cette suite en 1950, d'où son nom.
La conjecture de Collatz (appelée aussi **conjecture d'Ulam** ou **conjecture tchèque**, ou encore *problème* $3x+1$), énoncée en 1937, stipule que $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 1$.

Une conjecture due à Catalan en 1888 consiste à dire que la limite de la suite aliquote d'un entier est :

- soit 0 (dans le cas où il existe un rang n tel que a_n est un nombre premier) ;
- soit un nombre parfait q tel que $s(q) = q$;
  Rappelons qu'un nombre parfait est un nombre dont la somme de ses diviseurs est égale à son double, comme « 6 », car $2 \times 6 = 12 = 1 + 2 + 3 + 6$.
- soit une paire de nombres sociables x et y tels que $s(x) = y$ et $s(y) = x$.

À l'heure actuelle, aucune démonstration n'a été faite à ce sujet... D'ailleurs, certains mathématiciens pensent qu'un grand nombre de suites aliquotes partent à l'infini.
Paul Zimmerman, mathématicien participant à l'étude de telles suites, dit que la conjecture de Catalan est vraie.

La série de Grandi

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \,.$$

On peut alors écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots$$

On pourrait donc conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Or, on peut aussi écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - \cdots$$

On pourrait donc conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

Ceci serait sans compter sur le fait que l'on peut aussi écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - \lim_{n \to +\infty} u_n$$

Ce qui nous mènerait à écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

Alors, que penser de tout ceci ?

Il n'y a qu'une seule conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas ! En effet, $u_{2k} = 1$ et $u_{2k+1} = -1$ pour tout entier naturel k, ce qui signifie que la suite est alternée. Et comme toute suite alternée, elle n'admet pas de limite.

Cependant, si l'on considère le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geqslant 0} (-x)^n ,$$

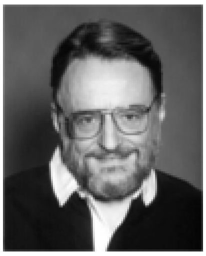
ce qui nous donne, pour $x = 1$:

$$\frac{1}{2} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n .$$

Il serait donc légitime de considéré que la série de Grandi vaut $\dfrac{1}{2}$.

C'est en partant de cette valeur que la théorie des cordes bosoniques (en physique) arrive à dire qu'il existe 26 dimensions. À noter toutefois qu'on lui préfère la théorie des cordes supersymétriques dans laquelle le nombre de dimensions est réduit à 10.

La suite de Conway



J.-H. Conway
(Né en 1937)

Je suis persuadé que vous avez déjà vu cette suite mais que vous ne savez peut-être pas qu'elle apparût en 1987 grâce à Conway sous le nom de suite audioactive ou, en anglais, plus connue sous le nom de Look and say.

Les dix premiers termes de cette suite sont :

$c_1 = 1$
$c_2 = 11$
$c_3 = 21$
$c_4 = 1211$
$c_5 = 111221$
$c_6 = 312211$
$c_7 = 13112221$
$c_8 = 1113213211$
$c_9 = 31131211131221$
$c_{10} = 13211311123113112211$

Ne remarquez-vous rien ? Si l'on se contente d'analyser de façon arithmétique les termes successifs, on ne va rien mettre en valeur. Par contre, quand on lit à haute voix la composition d'un terme, on constitue le terme suivant.

Par exemple, $c_1 = 1$; on lit que c_1 est constitué d'un « 1 », ce qui donne $c_2 =$ un « un » $= 11$. De même, c_2 est constitué de deux « 1 », d'où le 21 etc.

L'appellation anglaise *Look and say* (regarde et épelle) porte alors bien son nom...

Outre le fait que cette suite est ludique, elle a des propriétés extraordinaires pour ce genre de suites. Par exemple, on peut remarquer qu'aucun terme ne comporte un chiffre supérieur à 3. De plus, les termes de rangs pairs se terminent tous par « 11 » alors que ceux de rangs impairs se terminent par « 21 » (sauf le terme initial). Mais la propriété qui, à mes yeux, est la plus intéressante est que, si on note $|c_n|$ le nombre de chiffres du terme c_n, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lambda \ ,$$

où λ est solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
x^{71} &- x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} - x^{59} \\
&+ 2x^{58} + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} \\
&- 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38} - 7x^{37} + 7x^{36} + x^{35} \\
&- 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} + 9x^{26} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} \\
&- 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} \\
&+ 5x^{9} + x^{7} - 7x^{6} + 7x^{5} - 4x^{4} + 12x^{3} - 6x^{2} + 3x - 6 = 0
\end{aligned}$$

Vous vous plaigniez d'avoir à résoudre des équations de degré 3 en lycée ?...

Cette constante est appelée la **constante de Conway** et sa valeur approchée est :

$$\lambda \approx 1{,}303\,577\,269\,034\,296.$$

On montre alors que $|c_n|$ est proportionnel à λ^n :

$$|c_n| = k\lambda^n \qquad , \qquad k \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

On arrive même à donner une valeur approchée de k : si $c_1 = 1$, alors $k \approx 1{,}567$. Sinon, $k \approx 1{,}814$.
Du point de vue esthétique (puisque les mathématiques le sont), la suite de Conway peut être représentée par le schéma suivant, ressemblant à un chapeau :

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211
31131211131221
13211311123113112211
11131221133112132113212221
3113112221232112111312211312113211

La suite de Robinson

C'est une variante de la suite de Conway. Ici, on compte le nombre de fois qu'intervient un chiffre dans le terme précédent mais sans tenir compte de sa position, en partant du plus grand pour terminer au plus petit :

$r_1 = 0$
$r_2 = 10$
$r_3 = 1110$
$r_4 = 3110$
$r_5 = 132110$
$r_6 = 13123110$ (dans r_5, il y a un « 3 », un « 2 », trois « 1 » et un « 0 »)
$r_7 = 23124110$
$r_8 = 1413223110$
$r_9 = 1423224110$
$r_{10} = 1433223110$
$r_{11} = 1433223110$

On constate qu'à partir de r_{10}, les termes sont constants.

On arrive même à montrer que si le premier terme est compris entre 1 et 39, la suite est constante à partir d'un certain rang. Si $r_1 = 40$, la suite oscille, à partir d'un certain rang, entre les valeurs 152423224110 et 152413423110.

Pour $r_1 = 50$, la suite oscille, à partir d'un certain rang, entre les valeurs 16251423225110, 16251413424110 et 16153413225110.

Dans un cas général, on montre que quelle que soit la valeur initiale de la suite de Robinson, la suite finit par être soit constante, soit « oscillante » entre 2 ou 3 valeurs.

La suite de Newman-Conway

Définition 35

La suite de Newman-Conway est définie par ses deux premiers termes $u_1 = u_2 = 1$ et :

$$\forall\, n \geqslant 2,\ u_n = u_{u_{n-1}} + u_{n-u_{n-1}}\ .$$

Ainsi, les premiers termes sont :

$u_1 = 1$
$u_2 = 1$
$u_3 = u_1 + u_{3-1} = 2$
$u_4 = u_2 + u_{4-2} = 2$
$u_5 = 3$
$u_6 = 4$
$\vdots$

On montre que pour tout entier naturel k non nul :

$$u_{2^k} = 2^{k-1} \qquad ; \qquad u_{2k} \leqslant 2u_k\ .$$

Les suites de Somos

Définition 36

Créées par Michaël SOMOS dans les années 1990, ces suites sont plus complexes que celles que nous avons vu jusqu'à présent. La suite de SOMOS d'ordre k est définie par la relation suivante :

$$\begin{cases} s_j = 1 \quad \forall\, j \in [\![0; k-1]\!] \\ s_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{p=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} s_{n-p} \times s_{n-(k-p)}}{s_{n-k}}, \;\forall\, n \geqslant k \end{cases}$$

où l'on convient de noter $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Quelle étrange formule de récurrence... Cependant, on peut démontrer que les termes de cette suite sont tous entiers pour $k < 8$.
Les suites de SOMOS d'ordre 2 et 3 consistent en deux suites constantes faites uniquement de « 1 ». Le tableau suivant donne les premiers termes des autres suites :

k	Termes successifs
4	1, 1, 1, 1, 2, 3, 7, 23, 59, 314, 1 529,...
5	1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 11, 37, 83, 274, 1 217,...
6	1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 9, 23, 75, 421, 1 103,...
7	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 41, 137, 769,...

Speyer trouva en 2004 une utilité aux suites de SOMOS d'ordre 4 et 5 en combinatoire puis, à l'aide de Carroll, aux suites d'ordre 6 et 7.

La suite de Gödel

Définition 37

La suite de Gödel est définie par son premier terme $g_0 = 1$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\; g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_k^2 \,.$$

Cette suite croît extrêmement vite mais son comportement asymptotique est de la forme :

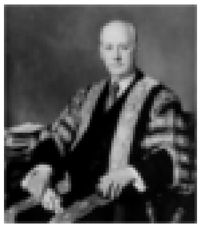
$$g_n \underset{+\infty}{\sim} C^{2n} \left(n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{21}{n^3} + \frac{138}{n^4} - \frac{1\,091}{n^5} + \cdots \right)$$

où $C \approx 1{,}047\,831\,447\,576\,411\,229\,559\,909$.

Pour étudier ces suites, on peut considérer la suite auxiliaire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n g_n$ et $u_1 = 2$. En effet, avec cela, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + g_n^k \\ &= u_n + \left(\frac{u_n}{n}\right)^k \\ &= u_n + \frac{u_n^k}{n^k} \,. \end{aligned}$$

Les suites de Beatty



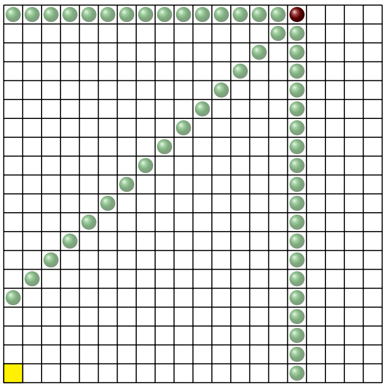
Samuel Beatty
(1881 - 1970)

La suite de Beatty de base p est définie par rapport à un irrationnel p de la façon suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \lfloor np \rfloor\ .$$

Notons que si $p > 1$, le nombre q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ est aussi un irrationnel.

Dans ce cas, le théorème de Beatty montre que les suites de Beatty de bases p et q constituent $\mathbb{N}^*$.



Cette suite intervient dans l'étude du jeu de Wythoff.
Mais quel est ce jeu ?

Il se joue à 2. On dispose d'un quadrillage carré (voir ci-contre) dans lequel on positionne un jeton dans la colonne la plus à droite ou dans la ligne du haut (jeton rouge).
Les joueurs peuvent déplacer le jeton, chacun leur tour, de n'importe quel nombre de cases suivant 3 directions (représentées ici en vert clair).
L'objectif est d'arriver à la case jaune.

En 1907, Wythoff a démontré que les positions gagnantes de ce jeu étaient les coordonnées $(x_k\,;y_k)$ ou $(y_k\,;x_k)$ telles que :

$$\begin{cases} x_k &= \lfloor k\varphi \rfloor \\ y_k &= \lfloor k\varphi^2 \rfloor = x_k + k \end{cases}$$

en posant $(0\,;0)$ les coordonnées de la case jaune.
Les deux suites (x_n) et (y_n) sont les suites de Beatty associées à l'égalité :

$$\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = 1.$$

Les suites de Douglas Hofstadter

Il est difficile de définir exactement ce que sont ces suites. Je vais juste exposer ici quelques exemples.

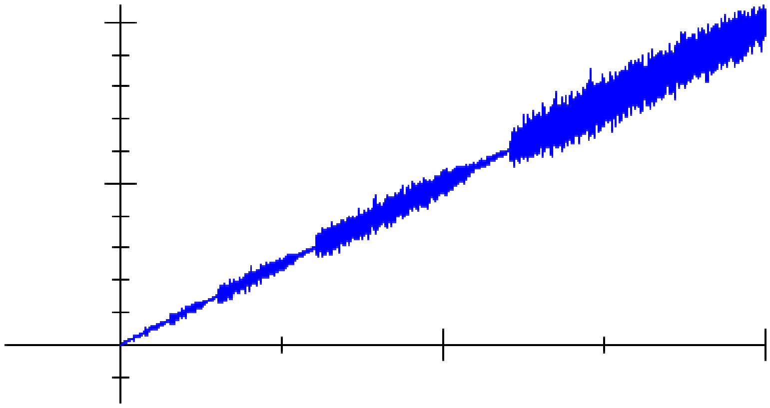
Le premier est tiré du livre « Gödel Escher Bach : An Eternal Golden Braid » écrit par Douglas Hofstadter lui-même.
Il s'agit de la suite définie par la relation :

$$q_n = q_{n-q_{n-1}} + q_{n-q_{n-2}} \qquad , \qquad q_1 = q_2 = 1.$$

Ses premiers termes sont :

$$1,1,2,3,3,4,5,5,6,6,6,8,8,8,10,9,10,11,\ldots$$

Bien qu'elle paraisse étrange, il semblerait qu'elle fasse apparaître une certaine forme de régularité comme le montre le graphique page suivante, représentant les 20 000 premiers termes de cette suite.



Le second exemple est la suite de Hofstadter-Conway, surnommée la « suite à 10 000 $ » en raison du fait que Conway offrit en 1988 un prix de cette somme à la personne trouvant l'entier n tel que $\left|\frac{a_i}{i}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{20}$ pour $i>n$, où a_i représente le i-ième terme de cette suite. Il démontra auparavant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$.
Cette suite est définie par la relation de récurrence :

$$a_n = a_{a_{n-1}} + a_{n-a_{n-1}} \qquad , \qquad a_1 = a_2 = 1$$

Les premiers termes de cette suite sont :

$$1,1,2,2,3,4,4,4,5,6,7,7,8,8,8,8,9,10,11,12,12,13,14,14,15,15,15,16,\cdots$$

Pour plus de détails, vous pouvez consulter la page :

`http://mathworld.wolfram.com/Hofstadter-Conway10000-DollarSequence.html`

Il existe d'autres suites du même type (sans jeu de mots) :

- $b_n = b_{b_{n-1}} + b_{n-1-b_{n-2}}$
- $a_n = n - a_{a_{n-1}}$, $a_0 = a_1 = 1$ (appelée la G-suite de Hofstadter)
- $a_n = n - a_{a_{a_{n-1}}}$, $a_0 = 0$ (appelée la H-suite de Hofstadter)

Et ce ne sont pas les seules !

Les suites de Stöhr

Elles sont définies par le premier terme $u_1 = 1$ et par la condition suivante :

u_n est le plus petit entier qui n'est pas la somme d'au plus k éléments distincts précédents de la suite, où k est un entier supérieur ou égal à 2.

• Si $k = 2$.

Le premier terme étant « 1 », le second ne peut être que « 2 » car c'est le plus petit entier après 1. Ensuite vient « 3 », mais $3 = 2 + 1$ (somme de 2 termes distincts précédents), donc il ne convient pas. On passe à « 4 » qui convient, etc.
Les premiers termes sont donc :

$$1,2,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,34,37,40,43,46,49,52,55,58$$

Ici, on ajoute 3 à un terme pour obtenir le suivant à partir de u_3.

• Si $k = 3$.

Les premiers termes sont :

$$1{,}2{,}4{,}8{,}15{,}22{,}29{,}36{,}43{,}50{,}57{,}64{,}71{,}78{,}85{,}92{,}99{,}106{,}113{,}120$$

Ici, on ajoute 7 à un terme pour obtenir le suivant à partir de u_4.

• Si $k = 4$.

Les premiers termes sont :

$$1{,}2{,}4{,}8{,}16{,}31{,}46{,}61{,}76{,}91{,}106{,}121{,}136{,}151{,}166{,}181{,}196{,}211{,}226{,}241{,}256{,}271$$

Ici, on ajoute 15 à un terme pour obtenir le suivant à partir de u_5. De plus, on remarque que les termes précédents sont des puissances de 2.

On peut alors conjecturer que :

$$\begin{cases} u_n^{(k)} = 2^{n-1} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant k+1 \\ u_n^{(k)} = u_{n-1}^{(k)} + 2^k - 1 & \text{si } n > k+1 \end{cases}$$

si $u_n^{(k)}$ représente le n^{e} terme de la suite de Stöhr de paramètre k.

Les suites d'Ulam

On trouve la définition de ces suites dans un livre de Clifford A. Pickover intitulé « Oh ! Encore des Nombres ! ».
Stanislaw ULAM les créa alors qu'il était à Los Alamos (d'où leur seconde appellation : suites de Los Alamos).

Ce sont les suites définies par la donnée de deux premiers termes $u_0 = a$ et $u_1 = b$, et par la condition suivante, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

u_n est le plus petit entier somme de deux termes distincts précédents de la suite, et d'une seule manière.

Si $a = 1$ et $b = 2$, alors le troisième terme sera $1 + 2 = 3$. Ensuite, nous devrions avoir 4 car il est obtenu d'une seule façon en ajoutant 3 et 1.

Vient ensuite... non, pas 5 car $5 = 1 + 4 = 3 + 2$ (donc obtenu de plus d'une seule façon), mais 6. Les premiers termes sont :

$$1{,}2{,}3{,}4{,}6{,}8{,}11{,}13{,}16{,}18{,}26{,}28{,}36{,}38{,}47{,}48{,}53{,}57{,}62{,}69{,}72{,}77{,}82$$

Cet exemple a une particularité intéressante découverte par Pickover et Ken Shirrif (en étudiant les 100 001 premiers termes) :

Si on observe la différence entre chaque terme successif, on construit une nouvelle suite :

$$1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}7{,}8{,}9{,}10{,}12{,}13{,}15{,}17{,}\cdots$$

On remarque qu'il manque un certain nombre de nombres :

$$6{,}11{,}14{,}16{,}18{,}21{,}23{,}26{,}28{,}31{,}32{,}33{,}35{,}36{,}37{,}\cdots$$

En calculant la différence entre chacun de ces termes, on obtient la suite (que l'on ordonne) :

$$1{,}2{,}3{,}5{,}\cdots$$

On obtient des nombres de Fibonacci, mais cela reste tout de même un cas particulier car il existe des cas où ces nombres ne sont nullement obtenus.

Ces suites peuvent être généralisées par les suites dites *s-additives de paramètre t.*
Par exemple, la suite d'Ulam est une suite 1-additive de paramètre 2.

Grossièrement, dans les suites s-additives de paramètre t, notées aussi $(s,t)-$additives, chaque terme peut être obtenu par exactement s additions de t termes distincts précédents de la suite.

Les suites d'Euler-Bernoulli

Nous allons construire un triangle de nombres, de la même façon que l'on peut construire le triangle de Pascal.
Nous partons de « 1 ». Ensuite, nous mettons sur la deuxième ligne « 1 0 » comme sur le schéma suivant :

	1	
1		0

Sur la troisième ligne, nous partons de la gauche en mettant un « 0 », et on l'ajoute avec le nombre qui se trouve au-dessus à droite pour obtenir le nombre à droite et au-dessous :

		1		
	1		0	
0		$1(=0+1)$		$1(=1+0)$

Maintenant, on part de la droite en mettant un « 0 » et en procédant de même, mais en allant vers la gauche :

			1			
		1		0		
	0		1		1	
$2(=2+0)$		$2(=1+1)$		$1(=0+1)$		0

On continue ainsi en commençant alternativement à gauche, puis à droite, pour donner ceci :

					1					
				1		0				
			0		1		1			
			2		2		1		0	
	0		2		4		5		5	
16		16		14		10		5		0

Le versant droit, après retrait des « 0 », donne la suite d'Euler :

$$1,1,5,61,\ldots$$

Le versant gauche, après retrait des « 0 », donne la suite de Bernoulli :

$$1,2,16,272,\ldots$$

En mêlant les deux suites, on obtient la suite d'Euler-Bernoulli :

$$1,1,1,2,5,16,61,272,1\,385,7\,936,50\,521$$

Remarquons que la suite d'Euler donne les numérateurs des coefficients du développement en série de « $\sec x$ » :

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots$$

La suite de Bernoulli, quant à elle, donne les numérateurs des coefficients du développement en série de « $\tan x$ » :

$$\tan x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \cdots$$

Ces nombres sont d'ailleurs reliés aux nombres de Bernoulli par la relation :

$$b_n = \frac{2nt_n}{4^n\left(4^n - 1\right)}$$

où b_n représente le nombre de Bernoulli et t_n un terme de la suite de Bernoulli.

Les suites de Skolem

Définition 38

Une suite de Skolem d'ordre n est une liste de $2n$ éléments $\{s_1,s_2,\cdots,s_{2n}\}$ telle que :

- $\forall\, k \in [\![1;n]\!],\ \exists!\ (i;j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!] \mid s_i = s_j = k$
- Si $s_i = s_j = k$ avec $i < j$, alors $j - i = k$

On démontre qu'il ne peut exister de telles suites que si n ou $(n-1)$ est un multiple de 4.
En effet, il n'y a que des nombres entiers compris entre 1 et n dans ces suites et ils ont pour rang r_i et $r_i + i$. Ainsi, la somme de ces positions doit être égale à la somme des $2n$ premiers entiers, soit à $\dfrac{2n(2n+1)}{2}$. Or, cette somme s'exprime sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{i=1}^{n}(r_i + i)\ , \quad \text{soit en simplifiant :} \quad 2\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{i=1}^{n} i\ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & 2\sum_{i=1}^{n} r_i + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n(2n+1)}{2} \\ \iff & \sum_{i=1}^{n} r_i = n^2 - \frac{n(n-1)}{4}. \end{aligned}$$

Comme $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i \in \mathbb{N}$ et $n^2 \in \mathbb{N}$, il est nécessaire que $\dfrac{n(n-1)}{4} \in \mathbb{N}$. Et comme n et $(n-1)$ sont premiers entre eux, cela implique que n ou $(n-1)$ doit nécessairement être un multiple de 4.

Un système de triplets de Skolem est une partition de $[\![1;3n]\!]$ en n triplets obtenus à partir de la suite de Skolem du même ensemble. Par exemple, le système de triplets de Skolem relatif à $[\![1;28]\!]$ est :

$$\{1;10;11\};\{2;17;19\};\{3;9;12\};\{4;20;24\};\{5;13;18\};\{6;16;22\};\{7;14;21\};\{8;15;23\}$$

Les fractales 18

Le mot « fractale » vient du latin *fractus* qui signifie « fracturé ».
On peut tout aussi bien l'employer comme un nom (une fractale) ou comme adjectif (un objet fractal, une courbe ou figure fractale).

Définition 39

Un objet **fractal** se distingue par sa particularité à être autosimilaire, c'est-à-dire qu'à quelle qu'échelle que ce soit, on retrouve la même structure.

On doit à Benoît Mandelbrot, mathématicien franco-américain, le terme « fractale » en tant que nom, introduit dans le vocabulaire en 1974.
Parmi les figures les plus emblématiques des fractales, nous pouvons citer par exemple le flocon de Von Koch (vu dans l'exercice 26) ou encore le tapis de Sierpinski (vu dans l'exercice 35 et l'exercice 46). On peut même citer les fractals de Sierpinski.

Fractals de Sierpinski

Définition 40 ▶ Fractals de Sierpinski

Soit $\mathcal{O}$ un objet contenant p_0 parties $\left(\mathcal{P}_i^{(0)}\right)_{1\leqslant i\leqslant p_0}$ isométriques entre elles, $p_0 \geqslant 1$, toutes homothétiques à $\mathcal{O}$ et se coupant uniquement suivant leurs frontières.
On pose :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_0 & = \mathcal{O} \\ \mathcal{O}_{n+1} & = \mathcal{O}_n \setminus \bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant p_n} \left(\mathcal{P}_i^{(n)}\right) \end{cases}$$

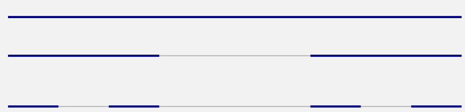
où p_n désigne le nombre de parties $\left(\mathcal{P}_i^{(n)}\right)_{1\leqslant i\leqslant p_n}$ isométriques entre elles de $\mathcal{O}_n$.
L'objet **fractal de Sierpinski** de $\mathcal{O}$ est obtenu en prenant la limite de $(\mathcal{O}_n)$.
L'objet fractal $\mathcal{O}_\infty$ ainsi obtenu est appelé l'**attracteur** [a] des p_0 homothéties transformant $\mathcal{O}$ en ses parties $\mathcal{P}_i^{(0)}$.

[a] Notion introduite par Hutchinson en 1981. En anglais : attractor of an IFS (iterated functions system).

Comme il n'est pas toujours facile de comprendre la définition, voyons quelques exemples :

Exemple 23 ▶ L'ensemble de Cantor

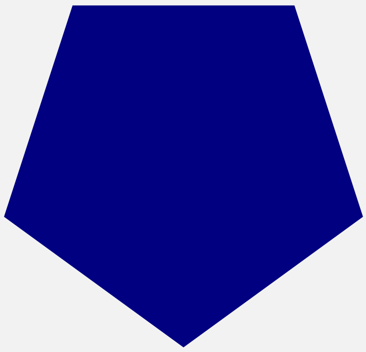
L'objet de départ $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$ est un segment :
L'objet $\mathcal{O}_1$ est $\mathcal{O}_0$ auquel on a enlevé un tiers de $\mathcal{O}_0$:
$\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 \setminus \frac{1}{3}\left(\mathcal{P}_1^{(1)} \cup \mathcal{P}_2^{(1)}\right)$:



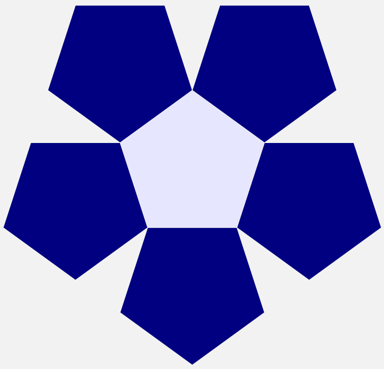
$\mathcal{O}_\infty$ est l'attracteur des deux homothéties de rapport $\dfrac{1}{3}$ dont les centres sont les extrémités du segment.

Exemple 24 ▶ Le pentagone de Sierpinski

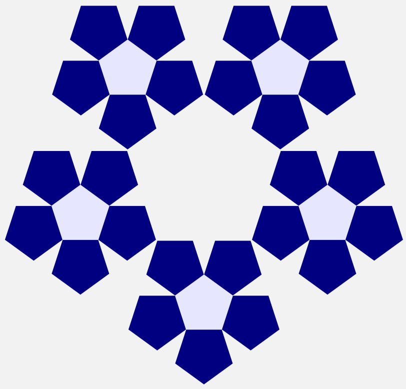
On part d'un pentagone régulier $\mathcal{O}_0$:



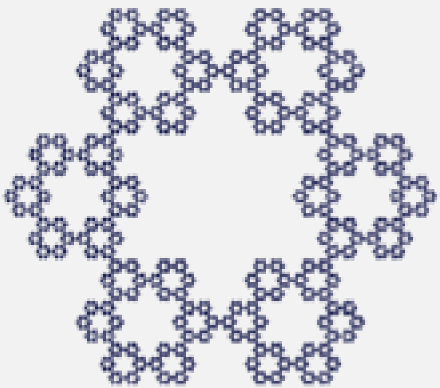
Puis on considère les cinq homothéties ayant pour centres les cinq sommets et pour rapport $\dfrac{1}{\varphi^2}$, où φ est le n'ombre d'or :



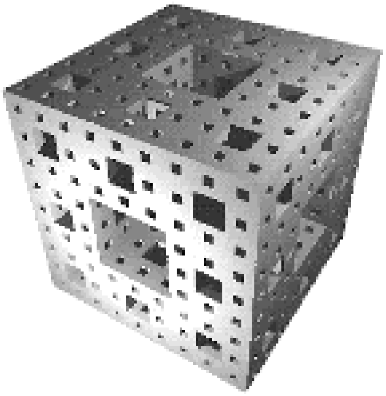
puis



On peut bien sûr généraliser ceci sur n'importe quel polygone régulier. Avec l'hexagone régulier, on pourra remarquer que la figure centrale est un flocon de Von Koch.



En dimension 3, l'objet fractal de Sierpinski le plus célèbre est sans doute l'éponge de Menger découverte en 1925.
Le principe de construction est le même que pour le tapis de Sierpinski, en considérant des homothéties de rapport $\frac{1}{3}$.

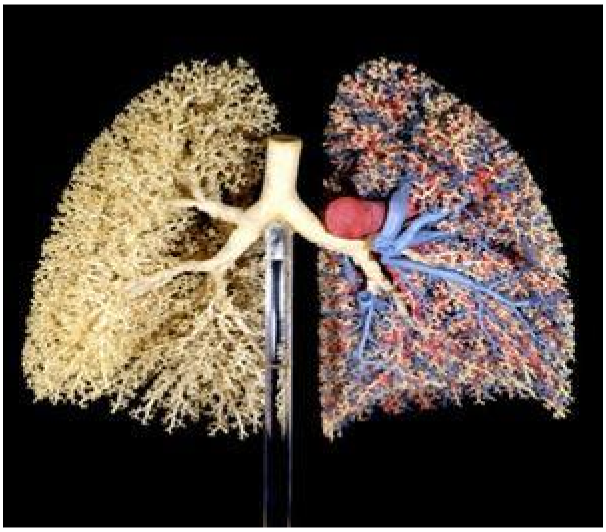


Les fractals dans la nature

L'exemple le plus classique est celui des côtes bretonnes :

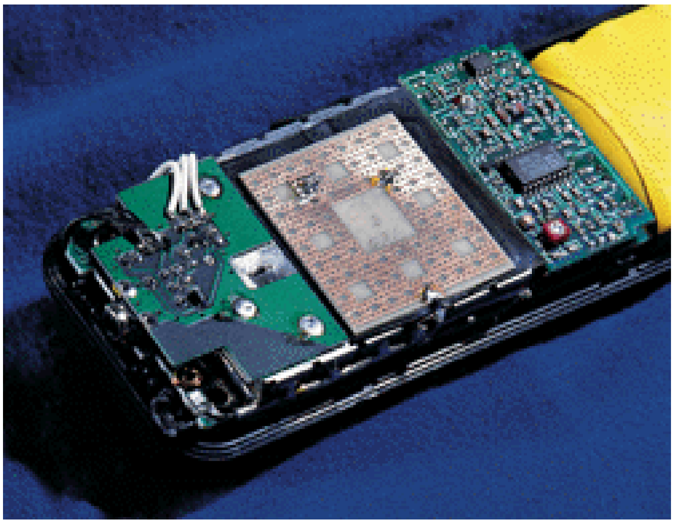
On a aussi le classique du chou romanesco :

Les poumons sont aussi un objet fractal :



L'Homme a même construit des objets fractals comme des murs anti-bruit :

ou encore s'est inspiré du tapis de Sierpinski pour élaborer des antennes de téléphones portables :



Ensemble de Mandelbrot

Revenons aux mathématiques et aux suites.

Définition 41 ▶ Ensemble de Mandelbrot

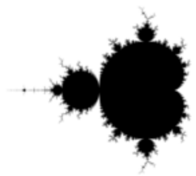
Soit $c \in \mathbb{C}$ et soit la suite (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

L'ensemble de Mandelbrot est la partie du plan complexe des points z_n tels que :

$$\lim_{n \to +\infty} |z_n| \neq +\infty \, .$$

En coloriant en noir cet ensemble de points, on obtient :



On peut alors énoncer le résultat suivant :

Proposition 47

1. Si $|c| > 2$, alors $\lim_{n \to +\infty} |z_n| = +\infty$, et donc c n'appartient pas à l'ensemble de Mandelbrot.
2. S'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|z_{n_0}| > 2$, alors $\lim_{n \to +\infty} |z_n| = +\infty$.

Démontrons le premier résultat par récurrence sur n, soit :

$$|z_n| > |c|^n \qquad (\mathcal{P}_n)$$

En effet, si $|c| \geqslant 2$ et si $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, alors la suite (z_n) diverge.

- Pour $n = 1$, $z_1 = c$ donc $|z_1| \geqslant |c|^1$. $(\mathcal{P}_1)$ est alors vraie.
- Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie pour un entier n fixé.

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| &= |z_n^2 + c| \\ &\geqslant \left| |z_n|^2 - |c| \right| \\ &\geqslant \left| |c|^{2n} - |c| \right| \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\geqslant |c|^{n+1} \left| |c|^{n-1} - |c|^{-1} \right| \\ &\geqslant |c|^{n+1} \Big(|c|^{n-1} - 1 \Big) \quad \text{car } |c| > 2 \\ &\geqslant |c|^{n+1} \quad \text{car } |c| > 2. \end{aligned}$$

Ainsi, $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

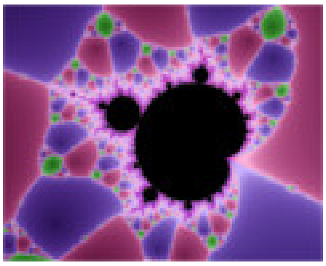
Donc $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Pour le deuxième point, on procède de la même façon en montrant par récurrence que $|z_n| \geqslant 2^{n-n_0+1}$, pour $n \geqslant n_0$. ■

Cette proposition sert à construire un algorithme qui permet de tracer l'ensemble de Mandelbrot. Concernant la géométrie élémentaire de cet ensemble, on arrive à montrer qu'il est compact, connexe (ce qui n'est pas évident quand on le regarde et quand on constate qu'il y a des « bouts » qui semblent être détachés du reste) et symétrique par rapport à l'axe des réels.
On peut aussi remarquer qu'il contient la cardioïde d'équation polaire $\rho(\theta) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos\theta)$ et le cercle de centre $(-1\,;0)$ et de rayon $\dfrac{1}{4}$, et que son intersection avec l'axe des réels est le segment $\left[-1\,;\dfrac{1}{4}\right]$.
L'ensemble de Mandelbrot n'est pas strictement autosimilaire mais localement autosimilaire, notamment autour des points de Misiurewicz et autour des points de Feigenbaum. Je ne m'étendrai pas sur ces deux notions, le lecteur pouvant les approfondir en regardant notamment les pages :

- `https://en.wikipedia.org/wiki/Misiurewicz_point` ;
- `http://math.univ-angers.fr/~tanlei/papers/vois.pdf`
- `https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombres_de_Feigenbaum`

Vous avez sans doute dû voir sur Internet des images colorées de cet ensemble. Les différentes couleurs utilisées pour le complémentaire de l'ensemble dans $\mathbb{C}$ sont dues aux différentes vitesses de divergence des points.
On retrouve cet ensemble ailleurs : dans la famille des polynômes $z \longmapsto z^3 + (\lambda - 1)z - \lambda$, par exemple, l'ensemble des points λ qui ne convergent pas vers une racine de ce polynôme par la méthode de Newton (voir 148) forment l'ensemble de Mandelbrot :



Ensemble de Julia, ensemble de Fatou

Définition 42

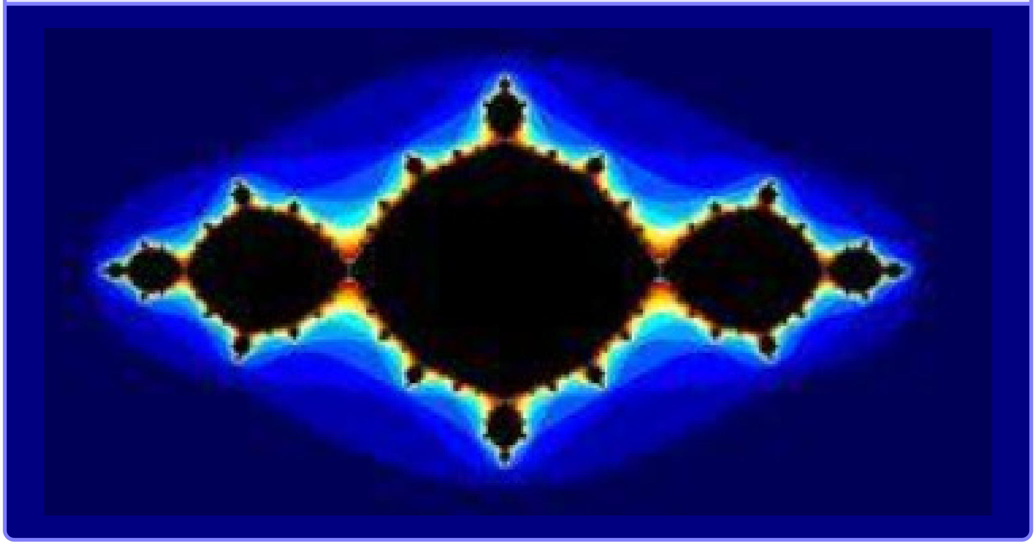
Soit f une fonction (ou application) holomorphe du plan complexe.
À tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on associe la suite (z_n) définie par :

$$z_{n+1} = f^n(z_0) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(z_0)\ .$$

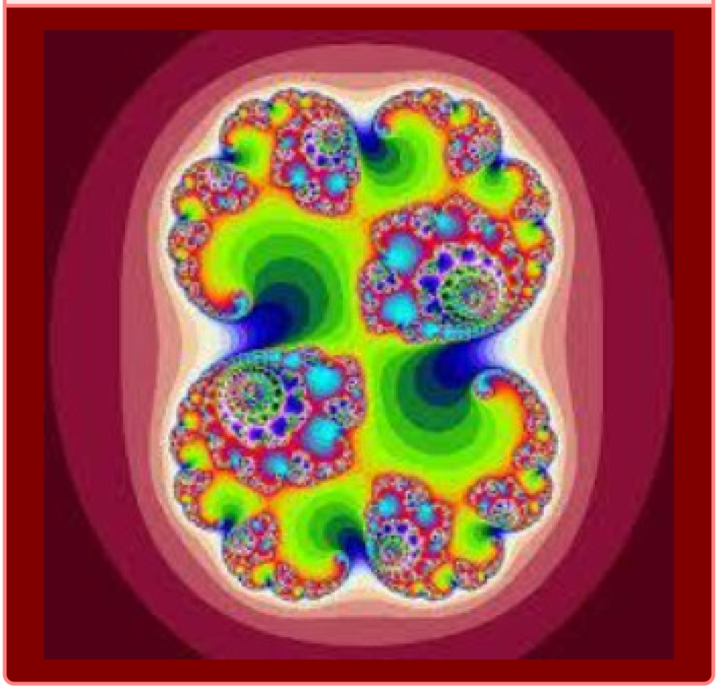
Le plan est alors composé de deux ensembles : celui des points z_0 pour lesquels (z_n) est bornée et son complémentaire dans $\mathbb{C}$.
L'**ensemble de Julia** associé à f, noté $\mathcal{J}_f$, est la frontière de ces deux ensembles.
Le complémentaire de $\mathcal{J}_f$ dans $\mathbb{C}$ est l'**ensemble de Fatou**, noté $\mathcal{F}_f$.

On a très souvent l'habitude de voir l'exemple où $f : z \longmapsto z^2 + c$ (qui nous rappelle la fonction utilisée pour construire l'ensemble de Mandelbrot), mais ce n'est pas le seul exemple. En voici deux autres :

$f(z) = c \sin z_n$



$f(z) = ce^{z_n}$



Proposition 48 ▶ Invariance de $\mathcal{F}_f$ et $\mathcal{J}_f$

Soit f une fonction (ou application) holomorphe du plan complexe.
$\mathcal{F}_f$ est un ouvert complètement invariant, c'est-à-dire que $f(\mathcal{F}_f) = f^{-1}(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f$, et $\mathcal{J}_f$ est un fermé complètement invariant.

De cette dernière proposition, on déduit que $\mathcal{F}_{f^{(n)}} = \mathcal{F}_f$ et que $\mathcal{J}_{f^{(n)}} = \mathcal{J}_f$.

Dimensions fractales

Définition 43 ▶ Dimensions fractales

Soit $\mathcal{O}$ un objet auquel on applique n homothéties de rapport $0 < r < 1$.

1. On appelle **dimension d'homothétie** du fractal obtenu le nombre $D_n = -\dfrac{\ln n}{\ln r}$.
2. On appelle **dimension de Hausdorff** du fractal X obtenu le nombre :

$$D_H = \inf\{s,\ H^s(X) = 0\} = \sup\{s,\ H^s(X) = \infty\}\ ,$$

où $H^s(X) = \lim\limits_{\delta\to 0} \inf \left\{ \sum\limits_{i\geqslant 1} \big(\mathrm{diam}(U_i)\big)^s \mid X \subset \bigcup\limits_{i\geqslant 1} U_i\ ,\ \text{avec } 0 < \mathrm{diam}\ U_i \leqslant \delta \right\}$.

3. On appelle **dimension de Minkowski-Bouligand** du fractale X obtenu le nombre :

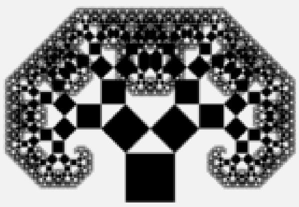
$$D_{\text{box}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}\ ,$$

où $N(\varepsilon)$ est un nombre de sous-ensembles de diamètre au plus ε nécessaires pour recouvrir l'ensemble X.

Ce sont les trois dimensions les plus utilisées. La dimension de Hausdorff est plus universelle que les autres mais peu commode à mettre en œuvre. On lui préfère celle de Minkowski-Bouligand (moins « théorique » car elle s'appuie sur la notion de comptage et non de mesure).
À noter que l'on a toujours $D_H \leqslant D_{\text{box}}$.

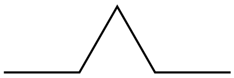
Exemple 25

1. Pour le flocon de Von Koch, $D_H = \dfrac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}2619$.
2. Pour le triangle de Sierpinski, $D_H \approx \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}5849$.
3. Pour l'hexagone de Sierpinski (dont nous avons parlé dans l'exemple 24, $D_H = \dfrac{\log 6}{\log 3} \approx 1{,}6309$.
4. Pour le tapis de Sierpinski (dont nous avons parlé dans l'exercice 35), $D_H = \dfrac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1{,}8928$.
5. Pour l'arbre de Pythagore, où chaque carré génère deux carrés de côté réduit de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $D_H = \dfrac{\ln 2}{\ln 2 - \ln\sqrt{2}} \approx 2$.



6. Pour l'éponge de Menger (voir page 167), $D_H = \dfrac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2{,}7268$.

Concernant le flocon de Von Koch, on part du motif suivant :



puis on applique 4 fois l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{3}$ d'où $D_H = \dfrac{\ln 4}{-\ln \frac{1}{3}} = \dfrac{\ln 4}{\ln 3}$.

Définition 44 ▶ Fractales déterministes et stochastiques

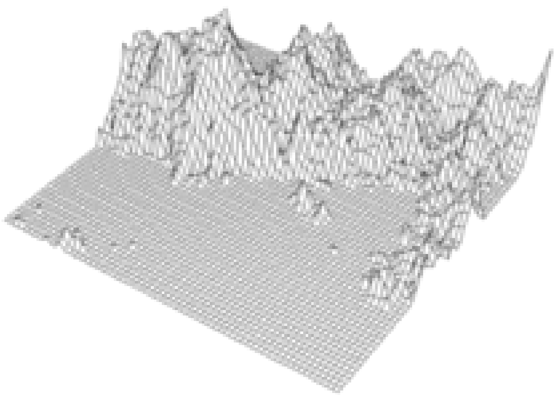
On appelle **fractale déterministe** une fractale générée par réplication ne faisant pas intervenir de composante aléatoire.
On appelle **fractale stochastique** toute fractale non déterministes.

Exemple 26 ▶ Exemples de fractales déterministes

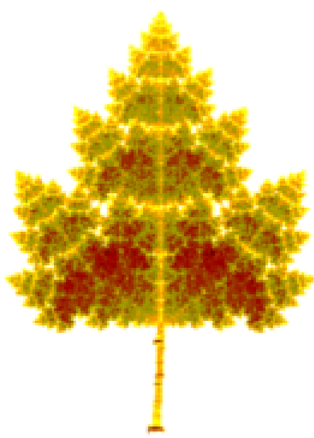
Les fractales que nous avons vues jusqu'à présent dans ce chapitre sont toutes déterministes car on répète à chaque étape la même transformation.

Pour générer une fractale stochastique, on n'a plus un seul mode de réplication, mais deux ou plusieurs choisis aléatoirement.
Pour créer des montagnes, par exemple, on obtient de bons résultats lorsque la dimension est proche de 2,2.
Plus la dimension croît, plus le résultat devient chaotique et irréaliste.

Historiquement, les fractales sont issues des travaux de Benoît Mandelbrot et John W. Van Ness sur le Mouvement Brownien Fractionnaire (en anglais, *fractional Brownian motion*, fBm).
L'extension multidimensionnelle des fBm permet de modéliser un large éventail de phénomènes naturels. Pour les reliefs, le paramètre temps t est transformé en un couple $(x\,;y)$ indiquant une position dans le plan, $V_H\,(x\,;y)$ donne l'altitude du point P.



Cependant, pour créer des images réalistes d'objets naturels, les méthodes fractales sont considérées comme les plus efficaces. C'est ainsi par exemple qu'à l'aide de fractales déterministes, on obtient l'image suivante :



19 Exercices divers

Pour terminer cet ouvrage, voici quelques exercices qui font intervenir les suites dans divers contextes.

Exercice 76 ▶ La constante d'Euler

On considère la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

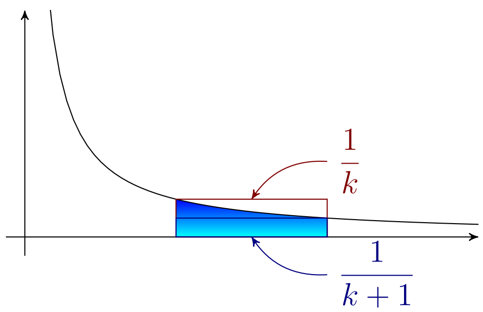
$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\ .$$

Montrez qu'elle converge.

Posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On a :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} f(x)\ \mathrm{d}x < \frac{1}{k}\ .$$

Pour s'en convaincre, il suffit de regarder le graphique suivant :



La partie colorée ( ) représente $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\ \mathrm{d}x$; elle est « encadrée » par les deux rectangles de base 1 et de hauteur respective k et $k+1$.

On a alors, pour tout entier naturel non nul k :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k} &\iff \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&\iff \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \\
&\iff -1 < \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} < -\frac{1}{n+1} \\
&\iff 0 < \frac{1}{n+1} < \gamma_{n+1} < 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

De plus,

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

La fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x) = 0$. Donc $g(x) < 0$ sur $[1;+\infty[$.

Ainsi,

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n < 0.$$

La suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante, donc elle converge puisqu'elle est bornée.

Cette limite est appelée la constante d'Euler, et est notée γ.On ne sait toujours pas si γ est transcendant ou pas.
Une approximation est :

$$\gamma \approx 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,431\,042\,159\,335\,939\,923$$

Exercice 77 ▶ Le nombre de Neper

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Montrez que cette suite converge.

Avant tout, notons que :

$$u_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Une approximation affine en $+\infty$ nous donne :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \qquad , \qquad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Ainsi,

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{1+\frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)},$$

d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}}$$

Exercice 78 ▶ Le nombre de Neper avec une intégrale

On considère l'intégrale suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\ .$$

Montrer que :

$$I_n = \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}$$

puis que :

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\ .$$

Avant tout, remarquons que :

$$\forall\, x \in [0\,;1],\ 0 \leqslant 1-x \leqslant 1.$$

Donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n\,!}\ .$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

De plus, à l'aide d'une intégration par parties, on montre que :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n-1)\,!}$$

puis, par récurrence,

$$I_n = \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\ .$$

Finalement, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\right) = 0$$

d'où le résultat final.

Exercice 79 ▶ Les intégrales de Wallis

Les intégrales de Wallis sont les intégrales définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x\ .$$

Expliquer pourquoi on peut écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x\ .$$

Montrer ensuite que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis convergente.

Montrer que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \frac{(2p)\,!}{2^{2p}(p\,!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p\,!)^2}{(2p+1)\,!}\ ,$$

puis que :

$$W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\ .$$

En effectuant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, on a :

$$\begin{aligned} W_n &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) \times (-\,\mathrm{d}t) \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\cos^n t\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\ \mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$W_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_1 = 1.$$

De plus,

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, \underbrace{(\sin x - 1)}_{\leqslant 0 \text{ sur } \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]}\ \mathrm{d}x \leqslant 0.$$

Donc $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Or, $W_n \geqslant 0$ car $\sin x \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, donc la suite est minorée. Elle converge donc.
On peut remarquer que :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \left(1 - \cos^2 x\right)\ \mathrm{d}x\ .$$

Ainsi,

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x\ \mathrm{d}x\ .$$

En effectuant une intégration par parties sur la seconde intégrale, on a :

$$W_{n+2} = W_n - \frac{1}{n+1} W_{n+2}\ ,$$

soit :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_{n+1} \qquad (1)\ .$$

Donc, si n est pair, en posant $n = 2p$, on a :

$$(2p+2)W_{2p+2} = (2p+1)W_{2p}\ ,$$

soit :

$$W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p}\ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} \\
&= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} W_{2p-4} \\
&= \cdots \\
&= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{2p-2k+1}{2p-2k-2} W_{2p-2k} \\
&\underset{k=p}{=} \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} W_0 \\
&= \frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdots 2 \times 1}{2p \times 2p(2p-2)(2p-2)\cdots \times 2 \times 2} W_0 \\
&= \frac{(2p)\,!!}{(2^p \times p\,!!)^2} W_0 \,.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{W_{2p} = \frac{(2p)\,!}{2^{2p}(p\,!)^2} \times \frac{\pi}{2}} \,.$$

De plus, l'équation (1) donne, lorsque $n = 2p+1$:

$$W_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} W_{2p+1} \,,$$

et donc :

$$\begin{aligned}
W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} \\
&= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} W_{2p-3} \\
&= \cdots \\
&= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2p-2k}{2p-2k+1} W_{2p-2k-1} \\
&= \frac{2^p \times p\,!}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} W_1 \\
&= \frac{2^p p\,! \times 2^p (p\,!)}{(2p+1)2p(2p-1)\cdots 3 \times 2} W_1
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{W_{2p+1})\frac{(2^p p\,!)^2}{(2p+1)\,!}}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n &\iff \frac{W_{n+2}}{W_{n+1}} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1 \\
&\iff \frac{n+2}{n+1} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1.$$

On peut donc écrire :

$$W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n \qquad (2)$$

Posons maintenant :

$$u_n = (n+1)W_nW_{n+1} \ .$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u_n &= (n+1)\frac{n+2}{n+1}W_{n+2}W_{n+1} \\ &= (n+2)W_{n+1}W_{n+2} \\ &= u_{n+1} \ . \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors constante. Donc,

$$u_n = u_0 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}.$$

En parallèle, d'après la relation (2), on peut aussi écrire :

$$u_n = (n+1)W_nW_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} nW_n^2 \ .$$

Ainsi,

$$\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Exercice 80 ▶ La formule de Stirling

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n\,!} \quad , \quad v_n = \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad , \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} v_n \ .$$

Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.
On admettra pour cela que $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k^2}$ *converge.*

En déduire que :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid n\,! \underset{+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

puis, à l'aide des intégrales de Wallis, montrer que $\lambda = \sqrt{2\pi}$.

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_n &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1 \\ &= -\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
De plus, $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} v_k = \ln u_{n+1} - \ln u_1 &\iff \ln u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} v_k + \ln u_1 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \ln u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k + \ln u_1 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \ln u_{n+1} = u_1 \times \mathrm{e}^{v} \end{aligned}$$

en convenant de noter $v = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
Notons alors $\lambda = \mathrm{e}^{v-1}$ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ainsi,

$$\frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n\,!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda},$$

ou encore :

$$n\,! \underset{+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \qquad (1)$$

Nous avons montré dans l'exercice précédent :

$$W_{2p} = \frac{(2p)\,!}{2^{2p}(p\,!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, à l'aide de la relation (1), cela devient :

$$W_{2p} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda\sqrt{2p}\left(\frac{2p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}}{2^{2p}\left[\lambda\sqrt{p}\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^{p}\right]^2} \times \frac{\pi}{2},$$

soit :

$$W_{2p} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\lambda\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Or,

$$W_{2p} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4p}},$$

donc,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{p}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4p}} &\iff \frac{\pi}{\lambda\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{p}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{p}} \\ &\iff \frac{\pi}{\lambda\sqrt{2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &\iff \lambda \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{n\,! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$$

Exercice 81 ▶ Intégrale de Gauss

Montrer que :

$$I = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \, \mathrm{d}x = J$$

puis montrer que :

$$I = \sqrt{n} W_{2n+1} \qquad \text{et} \qquad J = \sqrt{n} W_{2n-2}$$

où W_n représente les intégrales de Wallis.
En déduire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \; .$$

Nous savons que :

$$\forall\, t \in [0\,;1],\ 1 - t \leqslant \mathrm{e}^{-t} \; . \qquad (1)$$

Ainsi, en posant :

$$t = \frac{u}{n} \qquad , \qquad u \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}^*$$

on a :

$$\begin{aligned} (1) &\iff \left(1 - \frac{u}{n}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{u}{n}} \\ &\iff \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-u} \; . \end{aligned}$$

De plus,

$$\forall\, t \in [0\,;1],\ 1 + t \geqslant \mathrm{e}^{-t} \; ,$$

donc,

$$\mathrm{e}^{-u} \leqslant \left(1 + \frac{u}{n}\right)^{-n} \; .$$

En posant maintenant :

$$u = x^2 \; ,$$

on a :

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \; ,$$

donc,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \, \mathrm{d}x \; .$$

Posons :

$$x = \sqrt{n} \sin t \; .$$

Alors,

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \;\; \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{n} W_{2n+1} \; . \end{aligned}$$

Si on pose maintenant :

$$x = \sqrt{n}\tan t\ ,$$

on a :

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t \ \ \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{n} W_{2n-2}\ . \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}W_{2n+2} \iff \frac{\sqrt{2n}W_{2n+1}}{\sqrt{2}} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{2n}W_{2n+2}}{\sqrt{2}}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}W_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}W_{2n-2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ ;$$

alors,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ ,$$

et donc,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}}$$

Cette intégrale est appelée l'intégrale de Gauss.

Exercice 82 ▶ Les polynômes de Bernoulli

Soit B_n un polynôme de degré $n > 1$ tel que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in [\![2; +\infty]\!],\ B_n(x+1) - B_n(x) = x^{n-1},\ B_n(0) = 0.$$

À l'aide de $B_n(x)$, donner une méthode pour calculer :

$$\forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p\ .$$

Avant tout, notons que :

$$\begin{aligned} S_p(n) &= \sum_{k=0}^{n} \left(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)\right) \\ &= B_{p+1}(n+1)\ . \end{aligned}$$

- Cas où $p = 1$.

  Posons $B_2(x) = ax^2 + bx$. Alors,

  $$\begin{aligned} &\forall\ x \in \mathbb{R},\ a(x+1)^2 + b(x+1) - ax^2 - bx = x \\ &\iff ax^2 + 2ax + a + bx + b - ax^2 - bx - x = 0 \\ &\iff (2a-1)x + a + b = 0. \end{aligned}$$

On se ramène donc au système :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$B_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_1(n) &= B_2(n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\ , \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Cette formule a aussi été démontrée dans le chapitre des suites arithmétiques.

- Cas où $p = 2$.

  Posons :

  $$B_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx\ .$$

  On a alors :

  $$\begin{aligned} &\forall\, x \in \mathbb{R},\ a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) - ax^3 - bx^2 - cx = x^2 \\ &\iff ax^3 + 3ax^2 + 3ax + a + bx^2 + 2bx + b + cx + c \\ &\qquad\qquad - ax^3 - bx^2 - cx - x^2 = 0 \\ &\iff (3a-1)x^2 + (3a+2b)x + a + b + c = 0. \end{aligned}$$

  D'où le système :

  $$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

  Finalement, on obtient :

  $$B_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

  Ainsi, nous arrivons au résultat suivant :

  $$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

- Cas où $p = 3$.

  Posons :
  $$B_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx\ .$$
  Alors,
  $$B_4(x+1) - B_4(x) = x^3 \iff \begin{cases} 4a = 1 \\ 6a + 3b = 0 \\ 4a + 3b + 2c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases}$$
  On trouve :
  $$B_4(x) = \frac{x^2(x-1)^2}{4}.$$
  Ainsi,
  $$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

- Cas où $p = 4$.

  En posant :
  $$B_5(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex\ ,$$
  on arrive au système :
  $$\begin{cases} 5a = 1 \\ 10a + 4b = 0 \\ 10a + 6b + 3c = 0 \\ 5a + 4b + 3c + 2d = 0 \\ a + b + c + d + e = 0 \end{cases}$$
  On remarque que les coefficients qui interviennent dans ce système sont ceux du triangle de Pascal :
  $$\begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$
  On obtient :
  $$\begin{aligned} B_5(x) &= \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{10}x \\ &= \frac{x(x-1)(2x-1)\left(3x^2-3x-1\right)}{30}. \end{aligned}$$
  Ainsi,
  $$\boxed{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}}$$

- Cas où p est quelconque.

  Posons :
$$B_{p+1}(x) = \sum_{k=1}^{p+1} a_k x^k \,.$$
  Le système auquel on arrive est alors :
$$\begin{pmatrix} \binom{p+1}{p} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{p+1}{p-1} & \binom{p}{p-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{p+1}{p-2} & \binom{p}{p-2} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{p+1} \\ a_p \\ a_{p-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
  Ce système est triangulaire, donc facile à résoudre.
  On détermine d'abord a_{p+1} :
$$a_{p+1} = \frac{1}{\binom{p+1}{p}} = \frac{1}{p+1} \,.$$
  Ensuite, c'est au tour de a_p :
$$a_p = -\frac{\binom{p+1}{p-1} a_{p+1}}{\binom{p}{p-1}} = -\frac{\binom{p+1}{p-1}}{(p+1)\binom{p}{p-1}} = -\frac{1}{2} \,.$$
  Puis vient a_{p-1} :
$$a_{p-1} = -\frac{\binom{p+1}{p-2} a_{p+1} + \binom{p}{p-2} a_p}{\binom{p-1}{p-2}} = \frac{p}{12}.$$
  etc.

Exercice 83 ▶ Moyenne de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ. On pose alors :
$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \,.$$
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ mais que la réciproque n'est pas toujours vraie.

Nous savons par hypothèses que :
$$\forall\, \varepsilon > \,,\, \exists\, N > 0 | \forall\, n > N,\, |u_n - \ell| < \varepsilon \,.$$
Ainsi, pour $n > N$, $|v_n - \ell| = \left| \sum_{k=1}^{N} \frac{u_k - \ell}{n} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{u_k - \ell}{n} \right|$

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &\leqslant \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{u_k - \ell}{n} \right| + \sum_{k=N+1}^{n} \left| \frac{u_k - \ell}{n} \right| \\
&\leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \left| \frac{u_k - \ell}{n} \right|}_{S} + (n-N) \left| \frac{\varepsilon}{n} \right| \ .
\end{aligned}$$

S ne dépend pas de n donc il existe un N assez grand tel que $S < \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall\, n > N,\ |u_n - \ell| < 2\varepsilon\ ,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

La réciproque n'est pas toujours vraie ; en effet, si l'on prend la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_n = \frac{(-1)^1 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^n}{n}\ .$$

Cette suite converge vers 0 mais la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ diverge.

Exercice 84 ▶ Un produit de sommes

Exprimer :

$$\prod_{p=1}^{n} \sum_{k=0}^{p} 2^{k \times p!}\ .$$

Pour p fixé, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} 2^{k \times p!} &= \sum_{k=0}^{p} \left(2^{p!}\right)^k \\
&= \frac{1 - \left(2^{p!}\right)^{p+1}}{1 - 2^{p!}} \\
&= \frac{1 - 2^{(p+1)!}}{1 - 2^{p!}}\ .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\prod_{p=1}^{n} \sum_{k=0}^{p} 2^{k \times p!} &= \prod_{p=1}^{n} \frac{1 - 2^{(p+1)!}}{1 - 2^{p!}} \\
&= \frac{1 - 2^{(n+1)!}}{1 - 2^{1!}}\ .
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\boxed{\prod_{p=1}^{n} \sum_{k=0}^{p} 2^{k \times p!} = 2^{(n+1)!} - 1}$$

Exercice 85 ▶ Suite et intégrale

On considère la suite d'intégrales définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\ .$$

Montrer que $I_n \leqslant \dfrac{1}{n\mathrm{e}}$ pour $n > 0$ afin de déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n, puis en déduire alors l'égalité :

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k\,!} = \mathrm{e}\ .$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant t\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\ .$$

Ainsi,

$$0 \leqslant \int_0^1 t^{n-1} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t\ ,$$

soit :

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n\mathrm{e}}}$$

On en déduit alors, par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

En faisant une intégration par parties, on a :

$$I_{n+1} = \left[-t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\ ,$$

soit :

$$\boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_n &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + n\left(-\frac{1}{\mathrm{e}} + (n-1)I_{n-2}\right)\\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}}(1+n) + n(n-1)\left(-\frac{1}{\mathrm{e}} + (n-2)I_{n-3}\right)\\
&= \cdots\\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + n + n(n-1) + \cdots + n(n-1)\cdots(n-p+1)\right) + n(n-1)\cdots(n-p+1)I_{n-p}\\
&\underset{p=n}{=} -\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n\,!}{(n-k)!} + n\,!I_0\\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n\,!}{(n-k)!} + n\,!\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n\,!}I_n = -\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)!}+1-\frac{1}{\mathrm{e}} \\
\iff \frac{1}{n\,!}I_n = -\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)!}+1-\mathrm{e}\right) \\
\iff -\frac{\mathrm{e}}{n\,!}I_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)!}-\mathrm{e}+1 \\
\iff -\frac{\mathrm{e}}{n\,!}I_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}-\mathrm{e} \\
\iff \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{n\,!}I_n\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\,!}
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient alors :

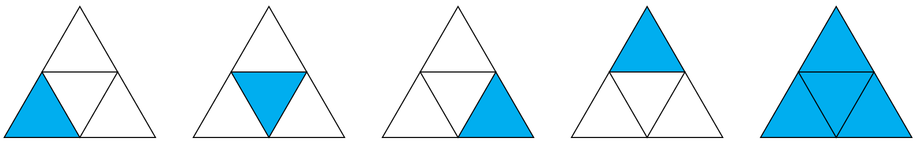
$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k\,!}=\mathrm{e}}$$

Exercice 86 ▶ Maillage de triangles équilatéraux

On considère un triangle équilatéral découpé en n^2 triangles équilatéraux identiques (maillage), $n \geqslant 1$.
Combien peut-on compter de triangles équilatéraux en tout ?

Notons u_n le nombre de triangles équilatéraux que l'on peut compter pour un maillage n^2.

- **Si $n = 1$**, il va de soit que $u_1 = 1$.
- **Si $n = 2$**, alors $u_2 = 5$:



Pour dénombrer tous les triangles équilatéraux dans un maillage particulier, on compte d'abord les triangles équilatéraux de côté 1 (si l'on considère que l'unité est la mesure du plus petit triangle équilatéral), puis ceux de côté 2, ainsi de suite jusqu'à n. Je décide de noter T_k les triangles équilatéraux de côté k.

- $n = 1$: $1T_1$
- $n = 2$: $4T_1 + 1T_2$
- $n = 3$: $9T_1 + 3T_2 + 1\ T_3$
- $n = 4$: $16T_1 + 6T_2 + 3T_3 + 1T_4$
- $n = 5$: $25T_1 + 10T_2 + 6T_3 + 3T_4 + 1T_5$
- $n = 6$: $36T_1 + 15T_2 + 10T_3 + 6T_4 + 3T_5 + 1T_6$

On peut alors constater que :

$$\begin{aligned} u_n &= n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k + u_{n-1} - (n-1)^2 \\ &= u_{n-1}\frac{n^2+3n-2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1 \ ,$$

et donc,

$$\sum_{k=1}^{n} (u_n - u_{n-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \ ,$$

soit :

$$u_n - u_0 = \frac{n(n+1)2n+1)}{12} + \frac{3n(n+1)}{4} - n \ .$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{u_n = \frac{n\left(n^2+6n-1\right)}{6}}$$

Exercice 87 ▶ Ceci n'est pas une suite binaire

On considère toutes les suites composées de 11 chiffres pris dans $\{0;1\}$, et on les range, en leur attribuant un numéro de 1 à 2048, en respectant les règles suivantes :

- la suite 00000000000 est numérotée « 1 » ;
- pour tout entier n strictement inférieur à 2048, la suite numérotée « $n+1$ » ne diffère de celle numérotée « n » que par un seul chiffre, et c'est la suite, parmi toutes celles n'ayant pas encore été numérotées, qui est obtenue en modifiant le chiffre le plus à droite possible de la suite numérotée « n ».

Quelle est la suite numérotée « 1992 » ?

Dans un premier temps, regardons les premières suites :

n	u_n
01	00000000000
02	00000000001
03	00000000011
04	00000000010
05	00000000110
06	00000000111
07	00000000101
08	00000000100

n	u_n
09	00000001100
10	00000001101
11	00000001111
12	00000001110
13	00000001010
14	00000001011
15	00000001001
16	00000001000

Pour $1 \leqslant p \leqslant 11$, appelons $x_n^{(p)}$ le chiffre de u_n situé au rang p en partant de la droite.

La suite des chiffres qui sont le plus à droite est :

$$x_2^{(1)} = 1,\ x_3^{(1)} = 1,\ x_4^{(1)} = 0,\ x_5^{(1)} = 0,\ x_6^{(1)} = 1,\ x_7^{(1)} = 1,$$
$$x_8^{(1)} = 0,\ x_9^{(1)} = 0,\ x_{10}^{(1)} = 1,\ x_{11}^{(1)} = 1,\ \cdots$$

La suite des chiffres qui sont à gauche du chiffre le plus à droite est :

$$x_2^{(2)} = 0,\ x_3^{(2)} = 1,\ x_4^{(2)} = 1,\ x_5^{(2)} = 1,\ x_6^{(2)} = 1,\ x_7^{(2)} = 0,\ x_8^{(2)} = 0,$$
$$x_9^{(2)} = 0,\ x_{10}^{(2)} = 0,\ x_{11}^{(2)} = 1,\ \cdots$$

etc.

On remarque que, pour tout entier naturel k,

$$\begin{aligned}
x_{2k}^{(1)} &\equiv k \mod 2\\
x_{4k-1}^{(1)} &\equiv k \mod 2\\
x_{8k-3}^{(1)} &\equiv k \mod 2\\
x_{16k-7}^{(1)} &\equiv k \mod 2\\
&\vdots\\
x_{2^nk-2^{n-1}+1}^{(1)} &\equiv k \mod 2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
x_{1992}^{(1)} = x_{2\times 996}^{(1)} \equiv 996 \mod 2 &\equiv 0 \mod 2\\
x_{1992}^{(2)} = x_{4\times 498}^{(2)} \equiv x_{4\times 498-1}^{(2)} \mod 2 \equiv 498 \mod 2 &\equiv 0 \mod 2\\
x_{1992}^{(3)} = x_{8\times 249}^{(3)} \equiv x_{8\times 249-3}^{(3)} \mod 2 \equiv 249 \mod 2 &\equiv 1 \mod 2\\
x_{1992}^{(4)} = x_{16\times 124+8}^{(4)} \equiv x_{16\times 124-7}^{(4)} \mod 2 \equiv 124 \mod 2 &\equiv 0 \mod 2\\
x_{1992}^{(5)} = x_{32\times 62+8}^{(5)} \equiv x_{32\times 62-7}^{(5)} \mod 2 \equiv 62 \mod 2 &\equiv 0 \mod 2\\
x_{1992}^{(6)} = x_{64\times 31+8}^{(6)} \equiv x_{64\times 31-7}^{(5)} \mod 2 \equiv 31 \mod 2 &\equiv 1 \mod 2\\
x_{1992}^{(7)} = x_{128\times 15+72}^{(7)} \equiv x_{128\times 16-64+1}^{(7)} \mod 2 \equiv 16 \mod 2 &\equiv 0 \mod 2\\
x_{1992}^{(8)} = x_{256\times 7+200}^{(8)} \equiv x_{256\times 8-128+1}^{(8)} \mod 2 \equiv 8 \mod 2 &\equiv 0 \mod 2\\
x_{1992}^{(9)} = x_{512\times 3+456}^{(9)} \equiv x_{512\times 4-256+1}^{(9)} \mod 2 \equiv 4 \mod 2 &\equiv 0 \mod 2\\
x_{1992}^{(10)} = x_{1024\times 1+968}^{(10)} \equiv x_{1024\times 2-512+1}^{(10)} \mod 2 \equiv 2 \mod 2 &\equiv 0 \mod 2\\
x_{1992}^{(11)} = x_{2048\times 1-1024+1}^{(11)} &\equiv 1 \mod 2
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite numérotée 1992 est la suite 10000100100.

Exercice 88 ▶ Irrationnalité de π

On suppose que π est rationnel et s'écrit $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers naturels non nuls.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n\,(p-qx)^n}{n\,!} \;.$$

On a alors $P_n(\pi) = 0$ quel que soit n.
On considère ensuite :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\; I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin t \;\; \mathrm{d}t \;.$$

À l'aide de plusieurs intégrations par parties, montrer que I_n est un entier relatif non nul puis que sa limite vaut 0.
En déduire l'irrationalité de π.

À l'aide d'une première I.P.P., on a :

$$I_n = -\int_0^\pi P_n'(t)\cos t \;\; \mathrm{d}t \;.$$

À l'aide d'une seconde I.P.P., on a :

$$I_n = -\int_0^\pi P_n''(t)\sin t \;\; \mathrm{d}t \;.$$

À l'aide d'une troisième et quatrième I.P.P., on a :

$$I_n = \int_0^\pi P_n^{(4)}(t)\sin t \;\; \mathrm{d}t \;.$$

Par récurrence, on montre que :

$$I_n = (-1)^n \int_0^\pi P_n^{(2n)}(t)\sin t \;\; \mathrm{d}t \;.$$

Or, P_n est de degré $2n$ et le terme de plus haut degré est $\frac{(-qt^2)^n}{n\,!}$, dont la dérivée n-ième est $\frac{(2n)\,!(-q)^n}{n\,!}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_n &= (-1)^n\frac{(2n)!(-q)^n}{n\,!}\int_0^\pi \sin t \;\; \mathrm{d}t \\ &= (-1)^n\frac{(2n)!(-q)^n}{n\,!} \times (-2) \\ &= 2n \times (2n-1) \times \cdots \times (n+1) \times q^n \times (-2) \;, \end{aligned}$$

et donc, $I_n \in \mathbb{Z}^*$.
Or, pour $0 \leqslant t \leqslant \pi$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(t) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. Mais ceci est contradictoire avec le fait que $I_n \in \mathbb{Z}^*$.
Notre hypothèse de départ est donc fausse et donc, **π est irrationnel.**

Exercice 89 ▶ Le problème de l'anniversaire (probabilités)

À partir de quelle valeur de n la probabilité pour que, dans un groupe de n personnes, deux au moins d'entre elles aient la même date d'anniversaire est-elle supérieure ou égale à 0,5 ?

Pour traiter ce problème, considérons l'événement contraire de celui qui nous intéresse : calculons donc la probabilité pour qu'aucune des personnes n'aient la même date d'anniversaire (probabilité que nous noterons p_n).

Pour $n = 2$, $p_2 = \dfrac{364}{365} = 1 - \dfrac{1}{365}$.

Pour $n = 3$, il faut que la troisième personne n'ait pas la même date d'anniversaire que les deux autres, d'où :

$$p_3 = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right).$$

Pour $n = 4$, on a :

$$p_4 = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\left(1 - \frac{3}{365}\right).$$

Et pour $3 \leqslant n \leqslant 366$, on a :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

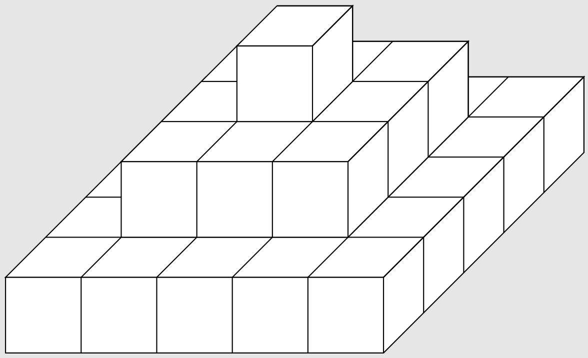
La probabilité qui nous intéresse est $1 - p_n$. Regardons ce qui se passe :

$p_2 = 0.99727$; $1 - p_2 = 0.00273$
$p_3 = 0.99179$; $1 - p_3 = 0.00821$
$p_4 = 0.98364$; $1 - p_4 = 0.01636$
$p_5 = 0.97285$; $1 - p_5 = 0.02715$
$p_6 = 0.95953$; $1 - p_6 = 0.04047$
$p_7 = 0.94376$; $1 - p_7 = 0.05624$
$p_8 = 0.92566$; $1 - p_8 = 0.07434$
$p_9 = 0.90536$; $1 - p_9 = 0.09464$
$p_{10} = 0.88304$; $1 - p_{10} = 0.11696$
$p_{11} = 0.85884$; $1 - p_{11} = 0.14116$
$p_{12} = 0.83295$; $1 - p_{12} = 0.16705$
$p_{13} = 0.80556$; $1 - p_{13} = 0.19444$
$p_{14} = 0.77686$; $1 - p_{14} = 0.22314$
$p_{15} = 0.74706$; $1 - p_{15} = 0.25294$
$p_{16} = 0.71635$; $1 - p_{16} = 0.28365$
$p_{17} = 0.68495$; $1 - p_{17} = 0.31505$
$p_{18} = 0.65305$; $1 - p_{18} = 0.34695$
$p_{19} = 0.62085$; $1 - p_{19} = 0.37915$
$p_{20} = 0.58853$; $1 - p_{20} = 0.41147$
$p_{21} = 0.55627$; $1 - p_{21} = 0.44373$
$p_{22} = 0.52426$; $1 - p_{22} = 0.47574$
$p_{23} = 0.49266$; $1 - p_{23} = 0.50734$
$p_{24} = 0.46161$; $1 - p_{24} = 0.53839$
$p_{25} = 0.43124$; $1 - p_{25} = 0.56876$
$p_{26} = 0.4017$; $1 - p_{26} = 0.5983$
$p_{27} = 0.37308$; $1 - p_{27} = 0.62692$
$p_{28} = 0.34547$; $1 - p_{28} = 0.65453$
$p_{29} = 0.31897$; $1 - p_{29} = 0.68103$
$p_{30} = 0.29362$; $1 - p_{30} = 0.70638$

On voit ici qu'à partir de 23 personnes, la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes qui fêtent leur anniversaire à la même date est supérieure à 0,5.

Exercice 90 ▶ La pyramide de Saqqara

La pyramide de Saqqara (site d'Égypte antique) a la forme suivante :



Démontrer par récurrence la formule suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En déduire le nombre de cubes qu'il faut pour faire une pyramide de Saqqara de n étages.

- ▶ **Initialisation.**
  Pour $n = 1$, $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1 \times 6 \times 3}{6} = 1 = 1^2$.
  L'initialisation est alors réalisée.

  ▶ **Hérédité.**
  Supposons la formule vraie pour un certain rang n.

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}.
\end{aligned}$$

  Le polynôme $2n^2 + 7n + 6$ a pour discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 7^2 - 4 \times 2 \times 6 \\
\Delta &= 1\ ,
\end{aligned}$$

donc admet pour racines :

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-7-\sqrt{1}}{2\times 2} \\ &= \frac{-8}{4} \\ &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n_2 &= \frac{-7+\sqrt{1}}{2\times 2} \\ &= \frac{-6}{4} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

et se factorise donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 2n^2+7n+6 &= 2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right) \\ &= (n+2)(2n+3). \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+\cdots+n^2+(\boldsymbol{n+1})^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(\boldsymbol{n+1})(\boldsymbol{n+1}+1)(2(\boldsymbol{n+1})+1)}{6} \end{aligned}$$

L'hérédité est donc vérifiée ce qui signifie que la formule est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- **Comptons le nombre de cubes.**
  Notons u_n le nombre de cubes pour l'étage n, en partant du haut. Ainsi :

$$u_1 = 1\ ;\ u_2 = 9\ ;\ u_3 = 25\ ;\ \ldots$$

On peut donc dire que :

$$u_n = (2n-1)^2\ .$$

Notons :

$$S_n = 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2\ .$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n &= S_{2n-1}-\left(2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n-2)^2\right) \\ &= S_{2n-1}-2^2\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right) \\ &= S_{2n-1}-4S_{n-1} \\ &= \frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{6}-4\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{16n^3-12n^2+2n}{6}-\frac{8n^3-12n^2+4n}{6} \\ &= \frac{8n^3-2n}{6} \\ &= \frac{n(4n^2-1)}{3}. \end{aligned}$$

Il faut donc $\boldsymbol{\frac{n(4n^2-1)}{3}}$ cubes pour construire une pyramide de Saqqara à $\boldsymbol{n}$ étages.

Exercice 91 ▶ Inspiré d'un Bac, Pondichéry 2005

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n^{10}}{2^n}\ .$$

1 Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_{n+1} \leqslant 0{,}95 u_n \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1{,}9.$$

2 On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

(a) Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de f.

(b) Montrer qu'il existe un unique réel α dans $[1;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1{,}9$.

(c) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.

(d) Montrer que pour $n \geqslant 16$, on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1{,}9$.

3 (a) Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à partir du rang 16.

(b) Que peut-on en déduire pour la suite ?

4 En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver que pour tout $n \geqslant 16$, $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}95^{n-16} u_{16}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

1 On a les équivalences suivantes, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1{,}9 &\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} \leqslant 1{,}9\\
&\iff \frac{(n+1)^{10}}{n^{10}} \leqslant 1{,}9\\
&\iff (n+1)^{10} \leqslant 1{,}9 n^{10}\\
&\iff \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1{,}9 n^{10}}{2^{n+1}}\\
&\iff u_{n+1} \leqslant \frac{1{,}9}{2} u_n\\
&\iff u_{n+1} \leqslant 0{,}95 u_n\ .
\end{aligned}$$

2 (a) La dérivée de f est : $f'(x) = -\dfrac{10}{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^9$.
Donc, sur $[1\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur cet intervalle.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(b) $f(1) = 2^{10}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et f est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$. Donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique α sur $[1\,;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1{,}9$ (car $1{,}9 \in [1\,;2^{10}]$).

(c) $\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)^{10} = 1{,}9 \iff 1+\dfrac{1}{\alpha} = \sqrt[10]{1{,}9}$

$$\begin{aligned} &\iff \frac{1}{\alpha} = \sqrt[10]{1{,}9} - 1 \\ &\iff \alpha = \frac{1}{\sqrt[10]{1{,}9} - 1} \\ &\iff \alpha \approx 15{,}08. \end{aligned}$$

Ainsi, $15 \leqslant \alpha \leqslant 16$ (donc $n_0 = 16$).

(d) La fonction f est décroissante donc pour $x \geqslant \alpha$, $f(x) \leqslant 1{,}9$. Ainsi, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 16, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1{,}9$.

3 (a)
$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^{10}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times 1{,}9 \quad \text{pour } n \geqslant 16 \\ &< 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante à partir du rang 16.

(b) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante à partir du rang 16 ; de plus, elle est minorée par 0 (car tous les termes sont positifs). Elle converge donc.

4 Avant tout, précisons que nous savons déjà que $u_n \geqslant 0$ pour tout n.

Initialisation.

Pour $n = 16$, $0{,}95^{16-16}u_{16} = u_{16}$ donc $0 \leqslant u_{16} \leqslant 0{,}95^{16-16}u_{16}$.
L'initialisation est alors réalisée.

Hérédité.

Supposons que pour un certain rang $n > 16$, l'encadrement soit vrai.
Comme $n \geqslant 16$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1{,}9$ d'après la question 2(d) et donc, d'après la question 1, $u_{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} \leqslant 0{,}95 \times 0{,}95^{n-16}u_{16} ,$$

soit :

$$u_{n+1} \leqslant 0{,}95^{(n+1)-16}u_{16} .$$

L'hérédité est alors vérifiée.

La propriété est donc vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 16$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}95^{n-16} = 0$; ainsi, de l'encadrement $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}95^{n-16}u_{16}$, et d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 92 ▶ Trigonométrie

Pour $n \geqslant 2$, on définit :

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est monotone.
2. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

1. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante.

2. On a :

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\sin\left(2\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3. On déduit que $v_n = v_2 \times \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Donc,

$$u_n = \frac{v_n}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{1}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}.$$

4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$. Il y a donc une forme indéterminée.

Une approximation affine de $\sin x$ est x lorsque x est très proche de 0. Ainsi,

$$2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2^{n-1} \times \frac{\pi}{2^n} = \frac{pi}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{\pi}}$$

Exercice 93 ► Trigonométrie et intégrale

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\ .$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie, puis calculer u_0.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, puis montrer qu'elle converge.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$un+1+u_n = \frac{1}{2n+2}.$$

4. En déduire alors que pour tout entier naturel n,

$$\frac{1}{2(2n+2)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2(2n+1)}.$$

5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ puis un équivalent en $+\infty$.

1. La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{t^{2n+1}}{t^2+1}$ est continue sur $[0\,;1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie.

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(t^2+1\right)\right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_n = \frac{1}{2}\ln 2}$$

2. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^{2n+3}-t^{2n+1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{2n+1}\frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Or, sur $[0\,;1]$, $t^2-1\leqslant 0$, $t^2+1>0$ et $t^{2n+1}\geqslant 0$. Donc $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$.
Ainsi, la suite est décroissante.

De plus, sur $[0\,;1]$, $\dfrac{t^{2n+1}}{t^2+1}\geqslant 0$ donc $u_n\geqslant 0$. La suite est donc minorée (par 0). Comme elle est décroissante, elle converge.

3 Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^{2n+3}+t^{2n+1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{2n+1}\frac{t^2+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{2n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+2}}$$

4 La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi,

$$u_{n+1} + u_n \leqslant 2u_n \ .$$

Donc, de la question précédente, on a :

$$\frac{1}{2(2n+2)} \leqslant u_n \ .$$

De plus, on peut dire que $u_n \geqslant u_{n+1}$ donc :

$$u_{n+1} + u_n \geqslant 2u_{n+1} \ .$$

Ainsi, de la question précédente, on a :

$$\frac{1}{2(2n+2)} \geqslant u_{n+1} \ ,$$

qui, par un changement d'indice, devient :

$$\frac{1}{2(2n+1)} \geqslant u_n \ .$$

Finalement, pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{\frac{1}{2(2n+2)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2(2n+1)}}$$

5 D'après l'encadrement précédent et le « théorème des gendarmes »,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

et :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}}$$

Index

arbre de Stern-Brocot, 126
arithmétique de degré d, 35
attracteur, 165

Casse-tête mathématiques de Sam Loyd, 121
Cercles de Ford, 128
combinatoire des mots, 134
configuration en escalier, 87
configuration en escargot, 88
conjecture d'Ulam, 155
conjecture tchèque, 155
constante d'Euler, 175
constante de Conway, 157
convergence quadratique, 118
convergente, 11

dimension d'homothétie, 172
dimension de Hausdorff, 172
dimension de Minkowski-Bouligand, 172

ensemble de Fatou, 170
ensemble de Julia, 170
ensemble de Mandelbrot, 169

fractal, 165
fractal de Sierpinski, 165
fractale déterministe, 173
fractale stochastique, 173
fraction continue, 113
fraction continue généralisée, 113

G-suite de Hofstadter, 161

H-suite de Hofstadter, 161

irrationnel quadratique, 115

jeu de Wythoff, 160

k-contractante, 83

linéaire d'ordre p, 99
Look and say, 156

Menger (éponge de), 167
mot de DYCK, 124
mots de Fibonacci, 102
moyenne arithmético-géométrique, 153

nombre d'argent, 106, 111
nombre d'or, 86, 96, 103
nombre de Catalan, 122
nombre sociable d'ordre n, 154
nombres de métal, 108
nombres polygonaux, 41

période, 8
point fixe, 83
polynôme caractéristique, 93, 100
principe de récurrence, 21
progression arithmétique, 23
purement périodique, 115

quasi périodique, 8

récurrence d'ordre 2, 21
récurrence faible, 21
récurrence forte, 21
récurrence simple, 21
raison, 21, 45
rang du terme, 2

septième constante de Bereha, 112
Sommes de Riemann, 141
Sphères de Pickover, 128
strictement croissante, 5
strictement décroissante, 5
strictement monotone, 5
suite aliquote, 154
suite arithmético-géométrique, 68
suite arithmétique, 21
suite audioactive, 156
suite bornée, 10
suite d'Euler, 163
suite d'Euler-Bernoulli, 164
suite de Beatty de base p, 160
suite de Bereha, 111
suite de Bernoulli, 163
suite de Brocot, 126
suite de Cauchy, 13
suite de Fibonacci, 102, 103
suite de Gödel, 159
suite de grêlons, 155
suite de Héron, 89

suite de k-bonacci, 107
suite de Newman-Conway, 158
suite de Padovan, 110
suite de Pell, 112
suite de Prouhet-Thue-Morse, 133
suite de Skolem d'ordre n, 164
suite de SOMOS d'ordre k, 159
suite de Syracuse, 155
suite de tribonacci, 106
suite extraite, 10
suite géométrique, 45
suite homographique, 93
suite majorée, 10
suite minorée, 10
suite numérique, 2
suites adjacentes, 14
suites de Los Alamos, 162
super-croissante, 6

terme, 2

ultimement périodique, 8, 115

valeur d'adhérence, 13