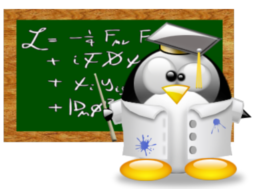
Stéphane PASQUET, 17 août 2018

Sommaire



Prérequis

- Continuité et théorème des valeurs intermédiaires
- Dérivées
- Primitives
- Logarithme népérien

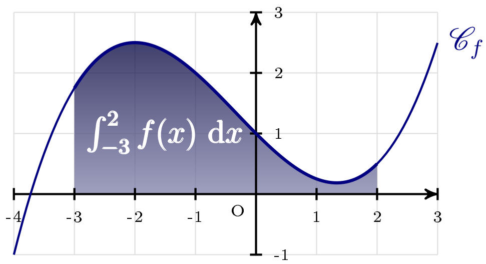
Définition

Intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$.
On appelle `intégrale de f sur I` l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et celle d'équation $x = b$.
On note alors cette intégrale :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

On peut visualiser $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ de la façon suivante :



Propriété

Lien avec les primitives

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$, et soit F une primitive de f sur I.
Alors,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Notation

On note aussi :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Remarques

- « $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ » si lit : « intégrale de a à b de $f(x)$ dx. »
- Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, « x » est ce que l'on appelle une *variable muette*, c'est-à-dire que l'on peut la remplacer par n'importe quelle lettre dans la mesure où il n'y a aucune ambiguïté. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarques (suite)

- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, a et b sont appelés les *bornes de l'intégrale.*
- $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ est toujours exprimée en *unités d'aire* (u.a.) (où 1 u.a. représente l'aire du rectangle (ou carré) de côtés 1 (en abscisses) et 1 (en ordonnées).
  Par exemple, si l'on prend 1,5 cm pour 1 unité en abscisses et 2 cm pour unité en ordonnées, 1 u.a. $=$ 3 cm^2.

Définition

Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, $a \neq b$.
On appelle `valeur moyenne de f sur` $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$ le nombre défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Remarque

Lorsqu'un bénéfice (par exemple) est désigné par une fonction f, le bénéfice moyen sur une période (donc sur un intervalle $[a\,;b]$) correspond à la valeur moyenne de f.

Exemple

Le bénéfice d'une multinationale s'exprime (en milliers d'euros) par la fonction :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 1$$

où x est exprimé en années.

Le bénéfice moyen de cette entreprise au cours des 10 premières années (donc sur l'intervalle $[0\,;10]$) est :

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{10-0}\int_0^{10} \left(\mathrm{e}^{0,5x} - 1\right)\ \mathrm{d}x \qquad \text{où } F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - x \text{ est une primitive de } f(x)\\
&= \frac{1}{10}\big(F(10) - F(0)\big)\\
&= \frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times 10} - 10\right) - \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times 0} - 0\right)\right]\\
&= \frac{1}{10}\left(0,5\mathrm{e}^{20} - 10 - 0,5\right)\\
&= \frac{1}{10}\left(0,5\mathrm{e}^{20} - 10,5\right)\\
\mu &\approx 24\,258\,258{,}720\,5
\end{aligned}$$

La valeur moyenne est exprimée dans la même unité que $f(x)$ donc le bénéfice moyen est d'environ 2 425 825 872 € (à l'euro près).