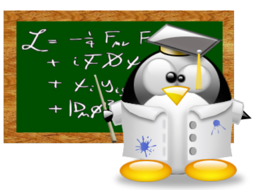
# Sommaire





# Prérequis

- Raisonnement par récurrence et suites numériques
- Continuité et théorème des valeurs intermédiaires
- Dérivées
- Primitives
- Logarithme népérien

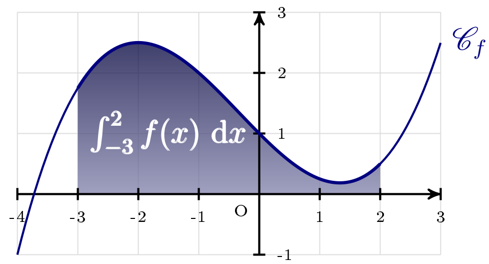
**Définition**

*Intégrale*

Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$.
On appelle `intégrale de f sur I` l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de $f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et celle d'équation $x = b$.
On note alors cette intégrale :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

On peut visualiser $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ de la façon suivante :




**Propriété**

*Lien avec les primitives*

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$, et soit F une primitive de $f$ sur I.
Alors,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

**Notation**

On note aussi :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

**Démonstration**

Considérons le cas où $f$ est strictement monotone su I et notons :

$$\mathscr{A}(t) = \int_0^t f(x)\ \mathrm{d}x$$

l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = t$, $t > 0$.
Ainsi,

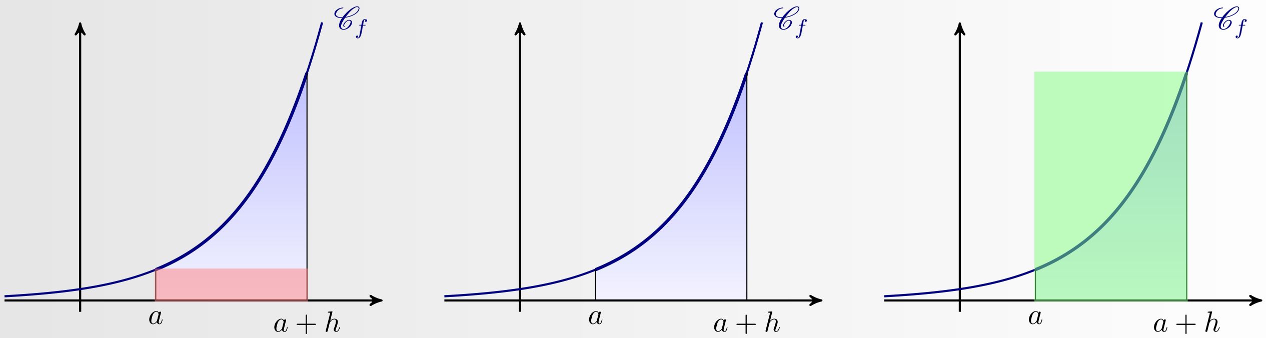
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \mathscr{A}(b) - \mathscr{A}(a),$$

...

ou encore, si on pose $b = a + h$, $h \geqslant 0$,

$$\int_a^{a+h} f(x)\ \mathrm{d}x = \mathscr{A}(a+h) - \mathscr{A}(a).$$

On a alors :




L'aire représentée par $\displaystyle\int_a^{a+h} f(x)\ \mathrm{d}x$ est comprise entre celle des deux rectangles rouge et vert :

$$h \times \min\left(f(a)\,;f(a+h)\right) \leqslant \int_a^{a+h} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant h \times \max\left(f(a)\,;f(a+h)\right).$$

Ainsi,

$$\min\left(f(a)\,;f(a+h)\right) \leqslant \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \max\left(f(a)\,;f(a+h)\right),$$

ou encore :

$$\min\left(f(a)\,;f(a+h)\right) \leqslant \frac{\mathscr{A}(a+h) - \mathscr{A}(a)}{h} \leqslant \max\left(f(a)\,;f(a+h)\right).$$

En faisant tendre $h$ vers 0, on obtient alors :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathscr{A}(a+h) - \mathscr{A}(a)}{h} = f(a),$$

ce qui signifie que $\mathscr{A}(t)$ est une primitive de $f$ sur I.
On prouve donc que sur tout intervalle où $f$ est strictement monotone, $\displaystyle\int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x$ est une primitive de $f$.
Considérons maintenant que $f$ n'est pas strictement monotone sur I. Notons alors :

$$\mathrm{I} = \mathrm{C}_1 \cup \mathrm{C}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{C}_n \cup \mathrm{D}_1 \cup \mathrm{D}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{D}_m$$

où les $\mathrm{C}_i$ sont des intervalles où $f$ est croissante et $\mathrm{D}_i$ des intervalles où $f$ est décroissante.
On peut utiliser ce que l'on vient de prouver afin de démontrer que sur I, $\displaystyle\int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x$ est la somme des primitives de $f$ sur les $\mathrm{C}_i$ et $\mathrm{D}_i$ donc sur I. ■

**Remarques**

1. « $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ » si lit : « intégrale de $a$ à $b$ de $f(x)\ \mathrm{d}x$. »

2. Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, le « $\mathrm{d}x$ » représente la largeur des rectangles que l'on utilise dans la *méthode des rectangles* (voir le bonus 1 de ce cours) pour approximer l'intégrale (c'est ainsi que l'on écrivait l'intégrale à l'origine, et cela est resté ainsi jusqu'à aujourd'hui).

3. Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, « $x$ » est ce que l'on appelle une *variable muette*, c'est-à-dire que l'on peut la remplacer par n'importe quelle lettre dans la mesure où il n'y a aucune ambiguïté. Ainsi,
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

4. Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, $a$ et $b$ sont appelés les *bornes de l'intégrale*.

5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ est toujours exprimée en *unités d'aire* (u.a.) (où 1 u.a. représente l'aire du rectangle (ou carré) de côtés 1 (en abscisses) et 1 (en ordonnées).
Par exemple, si l'on prend 1,5 cm pour 1 unité en abscisses et 2 cm pour unité en ordonnées, 1 u.a. $=$ 3 cm$^2$.

**Propriétés**

*Propriétés élémentaires*

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$.
Alors,
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

En considérant l'intégrale comme une aire, ces propriétés sont évidentes.

**Propriété**

*Comparaison de deux intégrales*

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues et positives sur $[a\,;b]$ telles que :
$$\forall\ x \in [a\,;b],\ \ f(x) \leqslant g(x).$$

Alors,
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Démonstration**

Une fois de plus, en considérant les deux intégrales comme deux aires, celle relative à $g$ est supérieure à celle relative à $f$ car $f(x) \leqslant g(x)$. D'où le résultat. ■

**Propriété**

*Relation de Chasles*

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$. Soit $c \in [a\,;b]$.
Alors,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Démonstration**

Il suffit une fois de plus de considérer l'aire représentée par $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ et de la couper en deux à l'aide de la droite d'équation $x = c$.
Les deux aires s'ajoutent d'où le résultat. ■

**Définition**

*Valeur moyenne d'une fonction*

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, $a \neq b$.
On appelle `valeur moyenne de f sur` $[a\,;b]$ le nombre défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Remarque**

Notons que :

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x,$$

ce qui signifie que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe représentative de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est identique à celle du rectangle de base $(b-a)$ et de hauteur $\mu$.
La valeur moyenne correspond donc à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ qui a la même aire que $\mathscr{D}$.

**Propriété**

*Inégalité de la moyenne*

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, $a \neq b$, et soit $\mu$ la valeur moyenne de $f$ sur $[a\,;b]$.
Si il existe deux nombres $m$ et $M$ tels que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ sur $[a\,;b]$, alors $m \leqslant \mu \leqslant M$.

**Démonstration**

D'après la propriété de comparaison,

$$\begin{aligned} m \leqslant f(x) \leqslant M &\iff \int_a^b m \,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x \\ &\iff m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \\ &\iff m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $\mathrm{I} = [a\,;b]$.
La fonction définie sur I par :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est la fonction dérivable sur I qui s'annule en $a$ et dont la fonction dérivée est $f$.

Ce théorème est la conséquence de la première démonstration faite dans ce cours.

**Propriété**

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $\mathrm{I} = [a\,;b]$.
Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Démonstration**

La relation de Chasles nous donne :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

D'où le résultat. ■

**Propriété**

*Linéarité de l'intégrale*

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues et positives sur $[a\,;b]$. Soit $\alpha$ un réel quelconque. Alors,

$$\int_a^b (\alpha f + g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Démonstration**

Posons F et G deux primitives respectives de $f$ et $g$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f+g)(x)\ \mathrm{d}x &= [\alpha \mathrm{F}(x)+\mathrm{G}(x)]_a^b \\ &= \alpha \mathrm{F}(b)+\mathrm{G}(b)-\alpha \mathrm{F}(a)-\mathrm{G}(a) \\ &= \alpha(\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a))+(\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a)) \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

■

**Remarque**

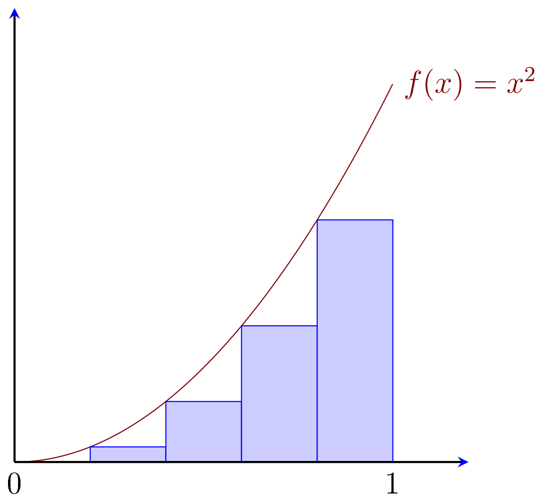
De cette propriété, on peut déduire, en prenant $\alpha=-1$ et $g(x)=0$ :

$$\int_a^b (-f(x))\ \mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Cela signifie que si une fonction est négative sur $[a\,;b]$, son intégrale est négative. On parlera alors d'*aire algébrique* (avec un signe).
**Ainsi, tout ce qui a été dit pour les fonctions positives reste valable pour les autres fonctions.**

## Complément 1: La méthode des rectangles

Intéressons-nous à $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dans le cas où $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x^2$.
Dans un premier temps, nous subdivisons $[a\,;b]$ en $n$ segments de même longueur (pour l'exemple, on prendra $n = 5$).
Ensuite, construisons $n$ rectangles comme représentés ci-dessous :



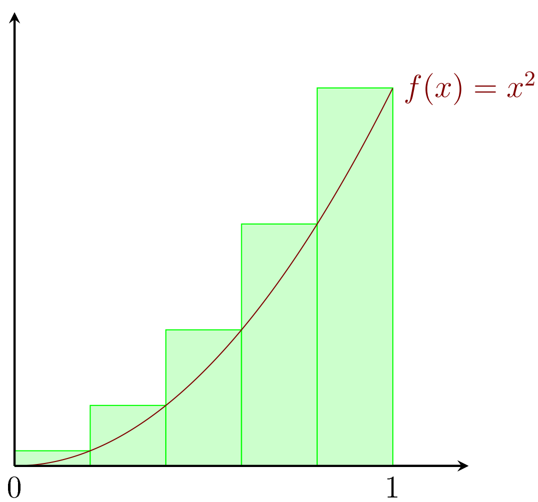

Notons $r_k$ le $k^{\text{e}}$ rectangle, $k$ variant de 0 à $n-1$.
Chaque rectangle aura une base de longueur $\dfrac{b-a}{n}$ et une hauteur égale à $f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$.
Ainsi, $r_k$ aura une aire égale à :

$$\mathscr{A}\left(r_k\right) = \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Dans notre exemple, on a :

$$\mathscr{A}\left(r_k\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^3}.$$

Construisons maintenant $n$ rectangles comme suit :




Notons $R_k$ le $k^{\text{e}}$ rectangle, $k$ variant de 0 à $n-1$.
Chaque rectangle aura une base de longueur $\dfrac{b-a}{n}$ et une hauteur égale à $f\left(a + (k+1)\dfrac{b-a}{n}\right)$.
Ainsi, $r_k$ aura une aire égale à :

$$\mathscr{A}\left(R_k\right) = \frac{b-a}{n} f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right).$$

Dans notre exemple, on a :

$$\mathscr{A}\left(R_k\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 = \frac{(k+1)^2}{n^3}.$$

Remarquons maintenant que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{A}\left(r_k\right) \leqslant \mathscr{A} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{A}\left(R_k\right).$$

Remarquons aussi que plus $n$ tend vers l'infini, plus il y a de rectangles qui se rapprochent de la courbe et donc plus la somme des aires se rapproche de $\mathscr{A}$ :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{A}\left(r_k\right) = \mathscr{A} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{A}\left(R_k\right).$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(ce dernier résultat aura pu être démontré par récurrence dans le chapitre des suites numériques)

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}(r_k) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

On en déduit alors que :

$$\boldsymbol{\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.}$$

Nous venons de voir sur un exemple simple en quoi consiste la *méthode des rectangles.*

Bien entendu, la fonction à intégrer est simple et à l'aide du cours, nous pouvons calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive de $f$, mais toutes les fonctions à intégrer n'auront pas une primitive connue. C'est en cela que cette méthode pourra nous aider (bien qu'elle ne soit pas la meilleure des méthode d'approximation d'aire par algorithme).

Prenons par exemple : $\mathrm{I} = \int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x$. Nous ne connaissons pas de primitives de $f \ : \ x \mapsto \ln x$ donc nous allons utiliser un algorithme qui s'appuie sur la méthode des rectangles pour trouver la valeur de I.

Nous allons donc considérer la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

qui correspond à la somme des aires des $r_k$.

**Algorithme 1**

```
Entrées
    n←2 000
    U : liste
    k,i : variables entières
Traitement
    Pour i allant de 1 à n
        U[i]←0
        Pour k allant de 0 à i-1 par pas de 1
            U[i]←U[i]+ln(1+k/i)/i
        Fin du Pour Afficher U[i]
    Fin du Pour
```

Cet algorithme permet d'obtenir une valeur approchée de $u_{2\,000}$. Il retourne la valeur $u_{2\,000} \approx 0{,}386\,121\,063\,908\,08$. Nous allons vérifier cette valeur dans le complément suivant.

## Complément 2: Vers une primitive du logarithme naturel

Nous ne connaissons pas de primitives du logarithme naturel. Nous allons en trouver une à l'aide de l'intégration par parties.

**Théorème** *Intégration par parties (hors programme)*

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$.
Alors,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [uv(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Démonstration**

Nous savons que :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

D'où :

$$\underbrace{\int_a^b (uv)'(x)\ \mathrm{d}x}_{=[uv(x)]_a^b} = \int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x,$$

soit :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [uv(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x.$$

■

Considérons : $\forall\ x \in [1\,;+\infty[,\ f(x) = \int_1^x \ln t\ \mathrm{d}t$.
Posons alors :

$$u(t) = \ln t \qquad u'(t) = \frac{1}{t}$$
$$v'(t) = 1 \qquad v(t) = t$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$f(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t,$$

soit : $f(x) = x\ln x - 1\ln 1 - [t]_1^x$, ou encore : $f(x) = x\ln x - x + 1$.
D'après le cours, $\displaystyle\int_a^x u(t)\ \mathrm{d}t$ est la primitive de $u$ qui s'annule en $a$.
On en déduit qu'une primitive de $\ln x$ est $x\ln x - x$.

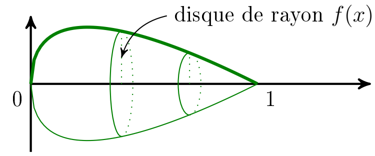
Dans le complément précédent, nous avions trouvé qu'une valeur approchée de $\displaystyle\int_1^2 \ln x\ \mathrm{d}x$ était 0,3844.
La calculatrice nous donne : $f(2) = 2\ln 2 - 2 \approx 0,386294361$.
On constate alors que l'algorithme précédent semble converger vers cette valeur, mais de façon très lente.
À titre d'information, il retourne $u_{5\,000} \approx 0{,}386\,225\,044\,735\,17$.

## Complément 3: Calcul d'un volume

On considère, dans un repère orthonormé, la fonction $f$ définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} - x.$$

À partir de sa courbe représentative (en trait épais ci-dessous), on engendre un volume en la faisant tourner autour de l'axe des abscisses, comme indiqué sur le graphique suivant :




On peut voir ce volume comme la somme des aires des disques de rayon $f(x)$, pour $x$ variant de 0 à 1. Un de ces disques a pour aire : $\pi\left(f(x)\right)^2$.
Ainsi, le volume peut se calculer par :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \pi\left(f(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x &= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^1 \left(x - 2x\sqrt{x} + x^2\right) \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^1 x \, \mathrm{d}x - 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x} \, \mathrm{d}x + \pi \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Posons :

$$I = \int_0^1 x\sqrt{x} \, \mathrm{d}x$$

et calculons-là à l'aide d'une intégration par parties.
On pose alors : $u(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = x$ et donc $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v(x) = \dfrac{1}{2}x^2$. D'où :

$$\begin{aligned}I &= \left[\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{4}\frac{x^2}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \\ I &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^1 x\sqrt{x} \, \mathrm{d}x \\ I &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}I\end{aligned}$$

On en déduit alors que $\dfrac{5}{4}I = \dfrac{1}{2}$, soit : $I = \dfrac{2}{5}$.
Le volume cherché est donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \pi\left(f(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x &= \pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 - \frac{4\pi}{5} + \pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{30}.\end{aligned}$$