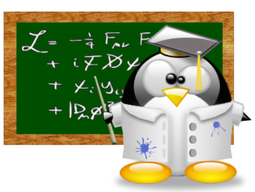
Sommaire



Prérequis

- Raisonnement par récurrence
- Fonction exponentielle

Définition *Logarithme népérien*

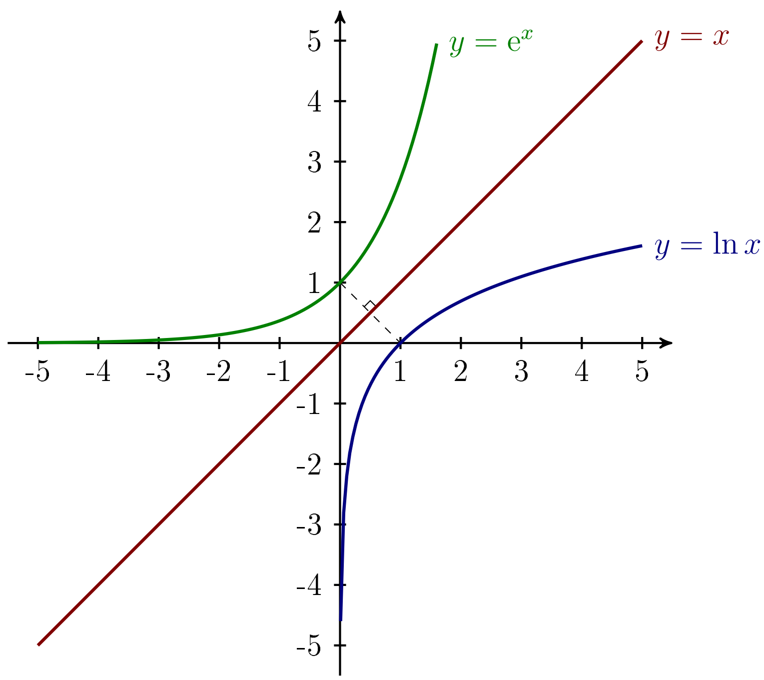
On définit la fonction `logarithme népérien` comme étant la fonction **ln** définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall \ x \in \mathbb{R}, \ \ln\left(e^x\right) = x \\ \forall \ x \in \mathbb{R}_+^*, \ e^{\ln x} = x \end{cases}$$

Remarque

On dit que la fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Graphiquement, cela se traduit par une symétrie de la courbe représentative de la fonction exponentielle par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) :



Propriété

$$\forall \ a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall \ b \in \mathbb{R}, \ \ln a = b \Longleftrightarrow a = e^b.$$

Démonstration

La fonction exponentielle étant continue et strictement croissante, on a :

$$\ln a = b \Longleftrightarrow e^{\ln a} = e^b.$$

Or, par définition, $e^{\ln a} = a$. D'où le résultat. ■

Remarque *Valeurs remarquables*

- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln e^0 = \ln 1 \Leftrightarrow 0 = \ln 1$).
- $\ln e = 1$ (car $e^1 = e \Leftrightarrow \ln e^1 = \ln e \Leftrightarrow 1 = \ln e$).

Propriété *Sens de variation*

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\ln a < \ln b$.
Alors,

$$\begin{aligned} \ln a < \ln b &\iff e^{\ln a} < e^{\ln b} \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\iff a < b \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Propriété *Relation fonctionnelle de la fonction logarithme népérien*

$$\forall\ (a\,;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Démonstration

D'une part, nous avons :

$$e^{\ln(ab)} = ab,$$

et d'autre part, nous avons :

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab.$$

Ainsi,

$$e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b}$$

et donc, parce que $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$ ■

Propriété *Propriétés algébriques*

Soit a un nombre réel strictement positif et n un entier relatif. Alors :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2} \ln a$

Démonstration

1. $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$.

   On en déduit alors que $\ln a + \ln \dfrac{1}{a} = 0$, soit $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \dfrac{1}{b} = \ln a - \ln b$ d'après le point précédent.
3. La démonstration se fait par récurrence sur n à l'aide de la propriété : $\ln\left(a^2\right) = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2\ln a$.
4. $\ln a = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln\sqrt{a}$. D'où le résultat, en divisant par deux.

■

Exemples

1. $\ln \dfrac{1}{3} = -\ln 3$
2. $\ln \dfrac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2$
3. $\ln 8 = \ln\left(2^3\right) = 3\ln 2$
4. $\ln\sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\ln 7$

Propriétés

Équations

1. $\forall\ (a\,;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \ln a = \ln b \iff a = b$.
2. $\forall\ \ k \in \mathbb{R},\ \ln x = k \iff x = \mathrm{e}^k$.
3. $\forall\ \ k \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^x = k \iff x = \ln k$.

Démonstrations

1. $\ln a = \ln b \iff \mathrm{e}^{\ln a} = \mathrm{e}^{\ln b}$

   $= \iff a = b$.
2. $\ln x = k \iff \mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^k$

   $\iff x = \mathrm{e}^k$.
3. $\mathrm{e}^x = k \iff \ln \mathrm{e}^x = \ln k$

   $\iff x = \ln k$.

■

Propriétés

Inéquations

1. $\forall\ (a\,;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \ln a < \ln b \iff a < b$.
2. $\forall\ \ k \in \mathbb{R},\ \ln x < k \iff x < \mathrm{e}^k$.
3. $\forall\ \ k \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^x < k \iff x < \ln k$.

Ces propriétés se démontrent de la même façon que les précédentes.

Théorème *Dérivée de la fonction logarithme népérien (admis)*

Sur $]0\,;+\infty[$, la dérivée de la fonction logarithme népérien est la fonction inverse.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Par ce théorème, on retrouve la stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ car sur cet ensemble, $\frac{1}{x} > 0$.

Théorème *Conservation du sens de variation par composition*

Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I.
Alors, la fonction définie par $\ln u$ possède les mêmes variations que u sur I.

Ce théorème résulte de la propriété $a < b \Longleftrightarrow \ln a < \ln b$.

Théorème *Dérivée de $\ln u$*

Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I.
Alors,

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Démonstration

On sait que :

$$(\mathrm{e}^v)' = v'\mathrm{e}^v$$

donc en posant $v = \ln u$, on a :

$$\left(\mathrm{e}^{\ln u}\right)' = (\ln u)'\,\mathrm{e}^{\ln u}$$

soit :

$$u' = (\ln u)' \times u$$

ou encore :

$$\frac{u'}{u} = (\ln u)'\,. \qquad \blacksquare$$