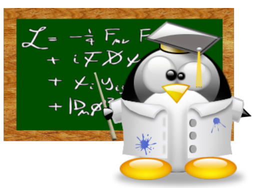
Sommaire



Prérequis

- Généralités sur les fonctions
- Fonction exponentielle
- Fonction logarithme

Définition *Primitives d'une fonction continue*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que F est `une primitive` de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

Exemples

- $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ est une primitive de $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$;
- $F(x) = -\dfrac{1}{3}\sin(3x+5) - 7$ est une primitive de $f(x) = \cos(3x+5)$ sur $\mathbb{R}$.
- $F(x) = -\dfrac{1}{x}$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0[$.

Théorème *Existence*

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.

Remarque

Une fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives.
En effet, si F est une primitive de f sur I, alors, pour $k \in \mathbb{R}$, $F + k$ l'est aussi car, sur I :

$$(F(x) + k)' = F'(x) + k' = f(x) + 0 = f(x).$$

On dit que les primitives sont définies à une constante près.

Propriété

Soit f une fonction continue sur I, et soient F et G deux primitives de f.
Alors, $F - G$ est une fonction constante sur I.

Démonstration

Si F et G sont deux primitives de f sur I, $F' = G' = f$.
Donc, $F' - G' = 0$, soit $(F - G)' = 0$. Ce qui signifie que la fonction $F - G$ est constante sur I.
■

Propriété

Soit f une fonction continue sur I. Soient x_0 et y_0 deux réels, $x_0 \in$ I.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Soit F une des primitives de f sur I. On sait que toutes les primitives de f sont de la forme $F+k$; il suffit donc de chercher k pour que $F(x_0)+k=y_0$. On trouve une solution unique pour k, $k=-F(x_0)+y_0$, donc il existe une et une seule primitive vérifiant la condition imposée. Cette solution G est telle que $\mathrm{G}(x)=F(x)-F(x_0)+y_0$. ■

Exemple

Trouvons la primitive de la fonction carré qui prend la valeur 1 en 2.

L'ensemble des primitives de la fonction carré est l'ensemble des fonctions $F(x)=\frac{1}{3}x^3+k$, $k\in\mathbb{R}$.
On veut que $F(2)=1$, donc $\frac{1}{3}2^3+k=1$, soit $k=1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}$.
On trouve alors que la primitive cherchée est la fonction $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux nombres de I. Soit F une primitive de f.
La différence $F(a)-F(b)$ ne dépend pas de la primitive choisie.

Démonstration

Soient F_1 et F_2 deux primitives de f sur I.
Alors, il existe un réel k tel que $F_2(x)=F_1(x)+k$. On a alors :

$$\begin{aligned}F_2(a)-F_2(b)&=F_1(a)+k-(F_2(a)+k)\\&=F_1(a)+k-F_2(a)-k\\&=F_1(a)-F_1(b)\end{aligned}$$

Nous voyons alors que les deux différences sont égales. ■

Propriété

Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	I
0	$k,\ k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
1	$x+k,\ k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+k,\ k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k,\ k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$

...

Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n},\ n \geqslant 2$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x + k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x + k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$

Remarque

Il existe des fonctions dont on ne connaît pas de primitives ; par exemple, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.