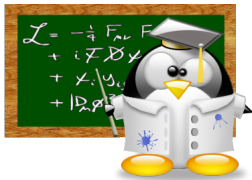




Sommaire

Variable aléatoire discrète	2
Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète	2
Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète	2
Densité de probabilité	3
Loi uniforme sur $[a; b]$	3
Espérance mathématique d'une loi uniforme	4



Prérequis

- Intégration
- Fonction exponentielle
- Conditionnement et indépendance

Définition

Variable aléatoire discrète

On considère une expérience aléatoire sur un univers Ω **fini**.

Une **variable aléatoire** X est une application de Ω dans \mathbb{R} qui, à chaque issue, associe un nombre réel.

Exemple

Si l'on considère l'expérience aléatoire consistant à jeter un dé cubique non truqué, et si X est la variable aléatoire représentant l'ensemble des issues possibles, alors $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \llbracket 1; 6 \rrbracket \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Définition

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

La **loi de probabilité de X** est la donnée :

- 1 Des valeurs possibles $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ prises par X ;
- 2 Des probabilités $P(X = x_i)$, pour i variant de 1 à n , de sorte que :

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1.$$

En général, on donne la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

Exemple

Dans le cas de l'exemple précédent (du dé cubique), la loi de probabilité de X est :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition

Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète

Soit $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ une variable aléatoire. On note, pour i variant de 1 à n , $p_i = P(X = x_i)$.

On définit l'**espérance mathématique** de X par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i .$$

Exemple

Dans notre exemple précédent,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{21}{6}\end{aligned}$$

Définition

Densité de probabilité

Une fonction $f : I = [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une **densité de probabilité** si :

1 f est continue sur I ;

2 $\forall x \in I, f(x) \geq 0$;

3 $\int_a^b f(x) dx = 1$.

Exemples

1 $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une loi de densité.

$$x \mapsto 1$$

2 $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une loi de densité.

$$x \mapsto e^{-x}$$

Propriétés

Soit X une variable aléatoire à densité f sur I .

1 $\forall \alpha \in I, P(X = \alpha) = 0$;

2 $P(X \leq a) = 1 - P(X > a)$.

Remarques

1 La première propriété signifie simplement que dans le cas d'une variable aléatoire continue, écrire $P(X = 2)$ (par exemple) n'a pas de sens puisque la probabilité est toujours égale à 0.

2 Par exemple, $P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3)$.

Définition

Loi uniforme sur $[a; b]$

Soit X une variable aléatoire à densité f sur I .

On dit que X **suit la loi uniforme** si $f(x) = \frac{1}{b-a}$ et $I = [a; b]$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $I = [a; b]$.
Alors, si c et d sont deux nombres de $[a; b]$:

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d - c}{b - a}.$$

Exemple

On choisit au hasard un nombre entre 0 et 1. La probabilité qu'il soit compris entre 0,3 et 0,4 est :

$$P(X \in [0,3; 0,4]) = \frac{0,4 - 0,3}{1 - 0} = 0,1.$$

Propriété

Espérance mathématique d'une loi uniforme

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $I = [a; b]$.
Alors, son espérance est :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2}.$$

Remarque

L'espérance est donc le milieu de l'intervalle $[a; b]$.