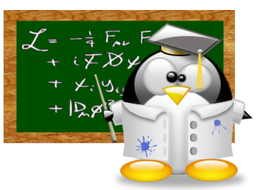
Sommaire



Prérequis

- Suites arithmétiques et géométriques (1re ES)

Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n-p)r,\ p \in \mathbb{N}$	$u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_p \times q^{n-p},\ p \in \mathbb{N}$
Somme des 1ers termes	$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ $= (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$ $= \text{nb termes} \times \dfrac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$	$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ $= u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q},\ q \neq 1$ $= 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nb termes}}}{1-q}$

Remarques

- Quand on parle d'intérêts composés, il est souvent question de suites géométriques ;
- Quand on parle d'augmentation régulière, il est souvent question de suites arithmétiques.

Exemples

1 Une usine de bonbons souhaite augmenter sa production de 10 boîtes par semaine. La production initiale est de 50 boîtes.
Si on note p_n la production de boîtes de bonbons la n^{e} semaine, alors :

$p_0 = 50,$
$p_{n+1} = p_n + 10.$

On a donc ici une suite arithmétique de **raison** $r = 10$ et de **premier terme** $p_0 = 50$.
Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$u_n = u_0 + nr,$$

soit :

$$u_n = 50 + 10r.$$

Si cette usine stocke toute sa production, alors le nombre de boîtes de bonbons dans son stock à la n^{e} semaine sera :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n &= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} \\ &= (n+1) \times \frac{50 + (50 + 10n)}{2} \\ &= (n+1) \times \frac{100 + 10n}{2} \\ &= (n+1)(50 + 5n). \end{aligned}$$

2 On place 10 000 € sur un compte à intérêts composés rapportant 2 % par an. Le capital sur ce compte est une suite (c_n) telle que :

$c_0 = 10\,000$,
$c_{n+1} = 1,02c_n$.

On a donc ici une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme 10 000. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$c_n = 10\,000 \times (1,02)^n.$$

Par exemple, au bout de 10 ans, le capital du compte est, en euros :

$$10\,000 \times (1,02)^{10} \approx 12\,189{,}94.$$

Propriété

Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n)une suite géométrique de raison $q > 0$.

- Si $0 < q < 1$, alors les termes u_n ont une valeur de plus en plus proche de 0.
  On dira alors que la `limite` de (u_n) vaut 0 et on écrira : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$.
- Si $q = 1$, les termes de la suite sont tous égaux. On dira que la suite est `constante` et on aura : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = u_0$.
- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, les termes de la suite auront une valeur de plus en plus grande.
  On dira alors que la limite de (u_n) est « $+\infty$ » et on écrira : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$.
  Si $u_0 < 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty$.

Définition

Suite convergente

On dira d'une suite (u_n) qu'elle est `convergente` si sa limite, quand n tend vers $+\infty$, est un nombre fini.

Exemple

Soit $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 1$.
Ainsi, (u_n) converge vers 1.

Propriété

Limite de la somme $1 + q + q^2 + \cdots q^n$

- Si $0 < q < 1$, alors la limite de $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ vaut $\dfrac{1}{1-q}$.
- Si $q > 1$, alors la limite de $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ vaut $+\infty$.

Démonstration

On sait que :
$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

- Si $0<q<1$, alors on peut écrire q sous la forme $q=\frac{1}{p}$, où $p>1$. On constate alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}(q^n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{p^n}\right)=0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}(p^n)=+\infty$.
  Ainsi,
  $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+q+q^2+\cdots+q^n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=\frac{1-0}{1-q}=\frac{1}{1-q}.$$
- Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-q^{n+1}\right)=-\infty$ et comme $1-q<0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=+\infty$.

$\blacksquare$

Exemples

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+1,1+(1,1)^2+(1,1)^3+\cdots+(1,1)^n\right)=+\infty$ car $1,1>1$.

Propriété

Si (u_n)est une suite géométrique de raison q,

- Si $0<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n)=\frac{u_0}{1-q}$.
- Si $q>1$, alors la somme des n premiers termes tend vers un infini dont le signe est celui du premier terme u_0 : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n)=\pm\infty$.

Définition *Suite arithmético-géométrique*

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est `arithmético-géométrique` si, pour tout entier naturel n, il existe deux réels $a\neq 1$, $a\neq 0$ et $b\neq 0$ tels que :
$$u_{n+1}=au_n+b.$$

Remarque

Si $a = 0$, la relation de récurrence devient : $u_{n+1} = b$ et la suite est donc constante.
Si $a = 1$, la relation de récurrence devient : $u_{n+1} = u_n + b$ et la suite est donc simplement arithmétique de raison b.
Si $b = 0$, la relation de récurrence devient : $u_{n+1} = au_n$ et la suite est donc simplement géométrique de raison a.

Méthode

Étude d'une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique.
On étudie en général (u_n) en considérant une autre suite (v_n), telle que $v_n = u_n - \alpha$, qui s'avère être géométrique.

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$$

Considérons alors la suite géométrique (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - \alpha.$$

1 Que vaut $\boldsymbol{\alpha}$?

Si (v_n) est une suite géométrique, alors, pour tout entier naturel n, on doit avoir :

$$\begin{aligned} & v_{n+1} = qv_n \\ \Leftrightarrow\ & u_{n+1} - \alpha = q(u_n - \alpha) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{3}u_n - 2 - \alpha = q(u_n - \alpha) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{3}\left(u_n - (6 + 3\alpha)\right) = q(u_n - \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & \begin{cases} q = \dfrac{1}{3} \\ 6 + 3\alpha = \alpha \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & q = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \alpha = -3 \end{aligned}$$

2 Comment trouver l'expression du terme général $\boldsymbol{u_n}$?

La suite (v_n) définie par : $v_n = u_n + 3$ est donc une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 3 = 6$.
Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$v_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{6}{3^n},$$

et donc :

$$\boldsymbol{u_n} = v_n - 3 \boldsymbol{= \frac{6}{3^n} - 3}\ .$$

On peut même dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -3$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{6}{3^n}\right) = 0$.

Complément 1: Algorithmique (utilisation d'un tableur)

Considérons la suite (u_n)définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 8 \end{cases}$$

Nous souhaitons générer les premiers termes de cette suite dans un tableur.

Pour cela, nous allons mettre les valeurs de n dans la première colonne, et celles de u_n dans la seconde :

	A	B
1	n	u(n)
2		
3		

On commence à entrer « 0 » dans la cellule `A2` et la valeur de u_0 dans `B2` :

	A	B
1	n	u(n)
2	0	3
3		

Ensuite, on entre la formule « `=A2+1` » dans la cellule `A3` afin que, par copier-glisser, cette formule génère les autres valeurs de n dans la colonne `A` :

	A	B
1	n	u(n)
2	0	3
3	=A2+1	

Pour copier-glisser la formule fraîchement rentrée, on se place sur la cellule `A3`, puis on clique sur le petit carré noir en bas à droite de la cellule et, tout en laissant le bouton de la souris enfoncé, on fait glisser le curseur vers le bas jusqu'à la ligne que l'on veut (par exemple, jusqu'à la 30^{e} ligne).

	A	B
1	n	u(n)
2	0	3
3	1	

Maintenant, on entre dans la cellule `B3` la formule qui permet de calculer u_1 : « `=B2/5+8` ».
Ensuite, par copier-glisser, on copie la formule sur toute la colonne B jusqu'à la dernière ligne.

	A	B
1	n	u(n)
2	0	3
3	1	=B2/5+8

On s'aperçoit alors que le tableur retourne des valeurs qui se rapprochent de plus en plus de 10 jusqu'à atteindre 10 à la ligne 15.
En fait, la suite n'atteint pas cette valeur mais la capacité d'affichage d'un tableur étant limitée, celui-ci arrondi le résultat et affiche « 10 » quand il ne peut plus afficher toutes les décimales.

On peut donc **conjecturer** (c'est-à-dire supposer) que (u_n) converge vers 10.

Complément 2: Algorithmique (utilisation d'un algorithme)

Considérons à nouveau la suite (u_n)définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 8 \end{cases}$$

Nous souhaitons générer les premiers termes de cette suite à l'aide d'un algorithme.
Nous allons donc utiliser par exemple l'algorithme suivant :

Algorithme 1

Entrées

```
n : indice du dernier terme à calculer
U : premier terme de la suite
i : entier de boucle
```

Traitement

Pour i allant de 1 à n allant de U à /

```
5+8→U
Afficher U
```

Fin du Pour

Explications :

- **Les entrées**
  Nous devons donner à l'algorithme une valeur finale ; nous l'appelons ici « n ».
  Ensuite, nous devons donner la valeur du premier terme de la suite : nous l'appelons ici « U ».
  Et enfin, « i » sera le nom de la variable qui va nous servir dans la boucle.
- **Le traitement**
  Nous créons une boucle pour calculer et afficher chacun des termes de la suite : u_1, u_2, ..., u_n.
  Dans la boucle, « U/5+8→U » signifie que l'on prend la valeur stockée dans U, on la divise par 5 et on ajoute 8 pour déterminer la valeur du terme suivant de la suite (d'après la formule de récurrence qui définit la suite).
  Cette nouvelle valeur, nous la stockons dans « U » pour nous en servir lors de la nouvelle itération de la boucle. Ensuite, nous l'affichons.
  Regardons pas à pas ce qui se passe :

valeur de i	ce que fait l'algorithme
pas de valeur	Avant la boucle, U vaut u_0, donc « 3 » pour nous.
i=1	on calcule : U/5+8=3/5+8=8,6. Donc on stocke 8,6 dans U et on affiche 8,6.
i=2	U vaut 8,6 donc on calcule 8,6/5+8=9,72 donc on stocke 9,72 dans U et on affiche 9,72.
i=3	U vaut 9,72 donc on calcule 9,72/5+8=9,944 donc on stocke 9,944 dans U et on affiche 9,944.
i=4	U vaut 9,944 donc on calcule 9,944/5+8=9,9888 donc on stocke 9,9888 dans U et on affiche 9,9888.
i=5	U vaut 9,9888 donc on calcule 9,9888/5+8=9,99776 donc on stocke 9,99776 dans U et on affiche 9,99776.

En utilisant le logiciel ALGOBOX, on a la page suivante.

AlgoBox : Suite arithmético-géométrique

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  LIRE U
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR U/5+8
    AFFICHER U
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Résultats

```
Entrer n : 12
Entrer U : 3
8.6
9.72
9.944
9.9888
9.99776
9.999552
9.9999104
9.9999821
9.9999964
9.9999993
9.9999999
10
```