Stéphane PASQUET, 20 septembre 2013

Sommaire

Définition

Matrice

Une matrice est un tableau contenant différentes valeurs de nombres, que l'on « encadre » par des parenthèses.
Si le tableau a n lignes et p colonnes, on dira que la matrice est de dimension $n \times p$.
Les nombres de la matrice sont appelés les coefficients de la matrice.

Exemples

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3.
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 3×2.

Notation

Quand on parle d'une matrice A de dimension $n \times p$, il est commun de noter a_{ij} le coefficient situé à la i^{e} ligne et j^{e} colonne.
On écrit alors $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$. Si $n = p$, on peut écrire $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ou plus simplement $\mathrm{A} = (a_{ij})$ s'il ne peut pas y avoir d'ambiguïté.

Définitions

Matrice ligne, matrice colonne

- Une matrice ligne est une matrice à 1 ligne.
- Une matrice colonne est une matrice à 1 colonne.

Exemples

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.
2. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Définition

Matrice transposée

La transposée d'une matrice A, de dimension $n \times p$, est la matrice notée ${}^t\mathrm{A}$, de dimension $p \times n$, obtenue à partir de A en faisant en sorte que les lignes de A deviennent les colonnes de ${}^t\mathrm{A}$.

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Définition

Matrice carrée

Une `matrice carrée` est une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes.
Si n est le nombre de lignes et colonnes, on dit que la matrice est d'`ordre` n.

Exemples

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.
2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

Définition

Matrice diagonale

Une `matrice diagonale` est une matrice carrée de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale principale (du haut/gauche vers le bas/droit).

Exemples

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Définition

Matrice nulle

La `matrice nulle` de dimension $n \times p$ est la matrice où tous les coefficients sont nuls.

Exemple

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle de dimension 2×3.

Définition

Matrice identité

La `matrice identité d'ordre n` est la matrice carrée diagonale d'ordre n où tous les coefficients non nuls sont égaux à 1.

Exemples

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3.

Remarque

Il est commun de noter I_n la matrice identité d'ordre n.

Définitions

Matrice triangulaire

Une `matrice triangulaire supérieure` est une matrice carrée où tous les coefficients au-dessous de la diagonale principale sont nuls.
Une `matrice triangulaire inférieure` est une matrice carrée où tous les coefficients au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

Exemples

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.
2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

Propriété

Égalité de deux matrices

Deux matrices $\mathrm{A} = (a_{ij})$ et $\mathrm{B} = (b_{ij})$ sont égales si :

- elles ont la même dimension ;
- pour tout i et j, $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemple

Soient $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1-x & 1\\ 3 & 1+y\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}x^2 & 1\\ z-1 & 1-y^2\end{pmatrix}$.
Déterminer x, y et z pour que $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}=\mathrm{B} &\Leftrightarrow \begin{cases}1-x=x^2\\ 3=z-1\\ 1+y=1-y^2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-1=0\\ z=4\\ y^2+y=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ z=4\\ y=0 \quad \text{ou} \quad y=-1\end{cases}\end{aligned}$$

Il y a donc 4 matrices A possibles.

Définition

Matrice somme

Soient A et B deux matrices de même dimension.
On définit la `matrice somme` de A et B par :

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right).$$

Exemple

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -8\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1+(-5) & 2+2\\ -1+3 & 3+(-8)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-4 & 4\\ 2 & -5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Propriété

Commutativité de l'addition

- Pour toute matrice A, en notant O la matrice nulle de même dimension que A, on a :

$$\mathrm{A}+\mathrm{O}=\mathrm{O}+\mathrm{A}=\mathrm{A}.$$

- Pour toutes matrices A et B de même dimension,

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{B}+\mathrm{A}.$$

Propriété *Multiplication par un réel*

Soit k un nombre réel et soit A une matrice.
Alors,

$$k\mathrm{A} = (k \times a_{ij})\,.$$

(On multiplie tous les coefficients de A par k).

Exemple

Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, alors :

$$2\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Propriété *Distributivité*

Soient A et B deux matrices de même dimension, et soit k un nombre réel.
Alors,

$$k(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = k\mathrm{A} + k\mathrm{B}.$$

Définition *Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne*

Soit A une matrice ligne de dimension $1 \times n$ et soit B une matrice colonne de dimension $n \times 1$.
Le produit de A par B est une matrice de dimension 1×1 définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{n1}b_{1n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \times (-3) + (-1) \times (-2) + 3 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 + 2 + 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Méthode *Multiplication d'une matrice par une matrice colonne*

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Le produit de A par X est défini comme suit :

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} -1 \times 7 + 2 \times (-5) + 1 \times 4 \\ 3 \times 7 + (-5) \times (-5) + 0 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 - 10 + 4 \\ 21 + 25 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -13 \\ 46 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Définition *Multiplication de deux matrices*

Soient A, une matrice de dimension $n \times p$, et B, une matrice de dimension $p \times m$.
La matrice produit AB est obtenue en multipliant chaque vecteur ligne de A par chaque vecteur colonne de B.

Exemple

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \times 5 + 2 \times 6 + (-3) \times 4 & (-1) \times 7 + 2 \times (-3) + (-3) \times (-4) \\ (-2) \times 5 + 0 \times 6 + 1 \times 4 & (-2) \times 7 + 0 \times (-3) + 1 \times (-4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -6 & -18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit I_n la matrice identité d'ordre n.
Alors,

$$AI_n = I_nA = A.$$

Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre, on peut calculer le produit AB et le produit BA, mais dans un cas général,

$$\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}.$$

Propriétés

Soient A, B et C telles que leurs sommes et leur produits existent.
Alors,

- $(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C} = \mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C})$
- $\mathrm{A} \times (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{A} \times \mathrm{B} + \mathrm{A} \times \mathrm{C}$
- $\mathrm{A} \times (k\mathrm{B}) = (k\mathrm{A}) \times \mathrm{B} = k(\mathrm{A} \times \mathrm{B})$, où $k \in \mathbb{R}$

Notation *Puissance d'une matrice*

Soit A une matrice carrée et $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors, on notera :

$$\mathrm{A}^n = \underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \cdots \times \mathrm{A}}_{n \text{ fois}}.$$

Propriété *Puissance d'une matrice diagonale*

Soit D une matrice diagonale d'ordre n, dont les coefficients sont notés d_1, d_2, ..., d_n.
Alors,

$$\mathrm{D}^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $\mathrm{D}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Définition *Matrice inverse*

Soit A une matrice carrée d'ordre n.
On définit la `matrice inverse` de A (quand elle existe) par la matrice notée A^{-1} telle que :

$$\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n.$$

Remarque

Si la matrice de A existe, on dit que A est inversible.

Exemple

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Posons alors $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ (en supposant qu'elle existe).
Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{I}_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8x+5z & 8y+5t \\ 3x+2z & 3y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 8x+5z=1 \\ 3x+2z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 8y+5t=0 \\ 3y+2t=1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 16x+10z=2 \\ 15x+10z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 16y+10t=0 \\ 15y+10t=5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=-3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y=-5 \\ t=8 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

On peut alors vérifier que $\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{I}_2$ et que $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}_2$.

Définition

Écriture matricielle d'un système

On considère le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}.$$

L'écriture matricielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \quad , \quad \text{où} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix},\ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Remarque

Nous avons vu le cas où le système avait 2 équations et 2 inconnues, mais ceci reste valable pour un nombre d'équations et d'inconnues supérieur.

Propriété

Un système linéaire d'écriture matricielle AX=B admet une unique solution si la matrice A est inversible.
Dans ce cas, la solution est donnée par le vecteur colonne :

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}.$$

Démonstration

On démontre ce résultat de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{AX} = \mathrm{B} &\Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1}\mathrm{AX} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{I}_n\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B},\ \text{où } \mathrm{I}_n \text{ est la matrice identité} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}. \end{aligned}$$

■

Exemple

On considère le système : $\begin{cases} 3x + 5y + 4z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$.

On pose alors :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel (XCAS, voir « Bonus 1 »), on trouve :

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{9}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{7}{13} \end{pmatrix}.$$

La solution du système est le vecteur colonne :

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{13} \\ \frac{28}{13} \\ -\frac{21}{13} \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que $x = -\dfrac{10}{13}$, $y = \dfrac{28}{13}$ et $z = -\dfrac{21}{13}$.

Définition

Matrice de Léontief

On considère un pays virtuel, sans échange extérieur, partagé en 2 secteurs. Chaque secteur consomme des productions de l'autre et éventuellement une partie de sa propre production : ces consommations sont appelées `consommations intermédiaires`. Le reste correspond à la `consommation finale` (ou `demande`).
On nomme x la production du secteur 1 et y celle du secteur 2.
On pose :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} ,$$

où c_{ij} représente la consommation intermédiaire du secteur i sur le secteur j, la `matrice technologique`, ou `matrice des coefficients techniques`, ou encore `matrice d'échanges`.
En notant :

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} x-(c_{11}+c_{12}) \\ y-(c_{21}+c_{22}) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

la relation « production = consommations intermédiaires + consommation finale » se traduit par l'égalité matricielle :

$$\mathrm{X} = \mathrm{AX} + \mathrm{D} \qquad \text{ou encore} \qquad (\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})\mathrm{X} = \mathrm{D}.$$

On en déduit alors que si $(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})$ est inversible, alors :

$$\mathrm{X} = (\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{D}.$$

Exemple

Une économie comporte deux secteurs de production : l'acier et l'électricité.
La production d'un euro d'acier nécessite : 0,3 euro d'acier et 0,2 euro d'électricité.
La production d'un euro d'électricité nécessite : 0,5 euro d'acier et 0,1 euro d'électricité. Les demandes des consommateurs correspondent à 200 000 € d'acier et 500 000 € d'électricité.
Soit x la quantité d'acier et y la quantité d'électricité à produire, exprimées milliers d'euros.

Si x représente la production totale d'acier, on a (en milliers d'euros) :

$$x = \underbrace{0,3x + 0,5y}_{\text{consommations intermédiaires}} + \underbrace{200}_{\text{demande}} .$$

De même,

$$y = 0,2x + 0,1y + 500.$$

On peut alors poser :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} .$$

Alors,

$$\mathrm{X} = (\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{D} \approx \begin{pmatrix} 811,321 \\ 735,849 \end{pmatrix} \quad \text{(calculs effectués sur Xcas).}$$

Complément 1: Utilisation de XCAS

Le logiciel XCAS est gratuit et permet d'effectuer des opérations sur les matrices.

Définir une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour la définir dans XCAS, on tape :

```
A:=[[-1,5],[0,2]]
```

Trouver l'inverse d'une matrice

```
B:=inv(A)
```

Ici, le logiciel nous retourne la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Trouver le produit de deux matrices

```
A*B;B*A
```

Ici, le logiciel nous retourne la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deux fois (le point-virgule sert à effectuer deux opérations à la suite), ce qui nous montre que B est l'inverse de A.

Trouver la somme de deux matrices

```
A+B
```

Ici, le logiciel nous retourne la matrice :

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{15}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$