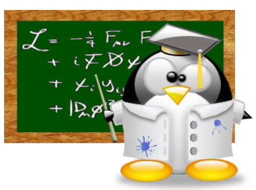
Continuité

Stéphane PASQUET, 17 août 2018

Sommaire



Prérequis

- Nombre dérivé
- Équation de la tangente
- Formule de dérivation

(ces notions ne seront pas utiles directement dans le cous, mais elles le seront dans les exercices où il faudra étudier les variations de fonctions)

Définition

Fonction continue

Une fonction continue sur un intervalle I est une fonction définie en tout nombre de I.
Autrement dit, f est continue sur I si, pour tout x de I, $f(x)$ existe.

Remarque

Dire qu'une fonction est continue sur I signifie que l'on peut tracer sa courbe représentative en un seul morceau sur I (sans lever le crayon).

Propriété

Fonctions usuelles continues

On admet que toutes les fonctions que l'on rencontre au lycée sont continues sur leur domaine de définition.
On admet aussi que :

- le produit de deux fonctions continues sur I est une fonction continue sur I ;
- Le quotient de deux fonctions continues sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I est une fonction continue sur I.

Exemples

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$. On n'écrira pas qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  En effet, la seule valeur interdite est $x=-1$ et sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$, cette fonction est continue comme quotient de deux fonctions continues (deux polynômes).
  Or, pour $x \neq -1$, $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1} = \dfrac{x-2}{x-1}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}\right) = \frac{-1-2}{-1-1} = \frac{3}{2}$.
  Finalement, la fonction est continue en -1 et donc sur $\mathbb{R}$.

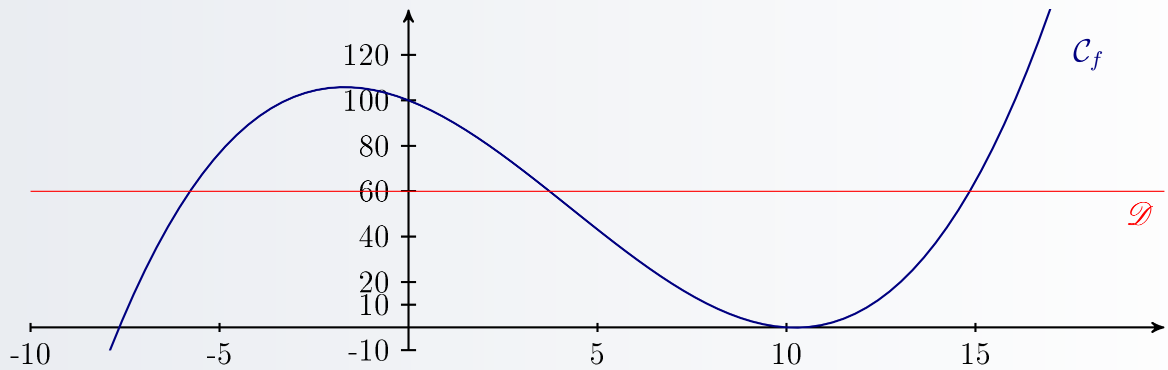
Théorème

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$. On note respectivement m et M le minimum et le maximum de $f(x)$ sur $[a\,;b]$.
Pour tout réel k tel que $m \leqslant k \leqslant M$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans $[a\,;b]$.

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = 0,125x^3 - 1,6x^2 - 6,5x + 100$:



Exemple (suite)

L'équation $f(x) = 60$ admet une unique solution sur $[-10\,;20]$ car :

- f est continue sur cet intervalle ;
- $m = f(-10)$ et $M = f(20)$;
- $60 \in [m\,;M]$.

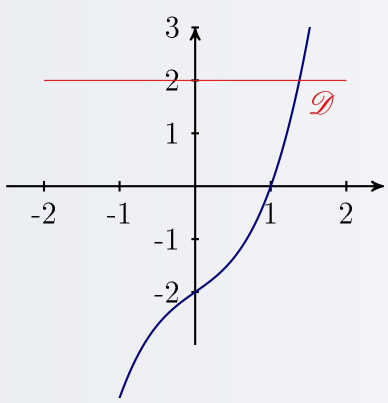
Théorème

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;b]$.

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 2$:



L'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1\,;2]$ car :

- f est continue et strictement croissante sur cet intervalle ;
- $f(1) = 0$ et $f(2) = 8$, donc $2 \in [f(1)\,;f(2)]$.

Définition *Dérivée seconde*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f'(x)$ existe.
La `dérivée seconde` de f est la dérivée de $f'(x)$; elle est notée : $f''(x)$.

Définition *Fonction convexe, fonction concave*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dira qu'elle est `convexe sur` $\boldsymbol{I}$ si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de I.
On dira qu'elle est `concave sur` $\boldsymbol{I}$ si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de I.

Exemples

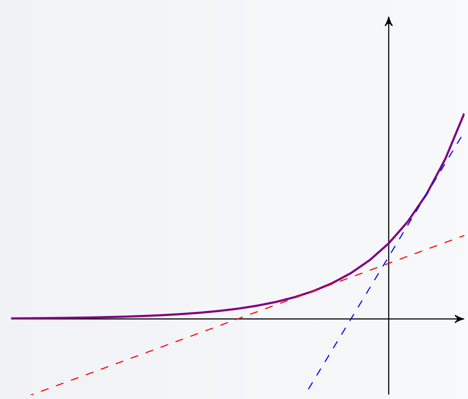
- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]0\,;+\infty[$ car $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ pour tout $x > 0$.
- La fonction $g : x \mapsto x^3$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $g'(x) = 3x^2 \geqslant 0$.

Théorème

f **est convexe sur I si ...**	f **est concave sur I si ...**
$f''(x) \geqslant 0$ sur I	$f''(x) \leqslant 0$ sur I
f' est croissante sur I	f' est décroissante sur I
Sa courbe représentative est toujours au-dessus de ses tangentes	Sa courbe représentative est toujours au-dessous de ses tangentes

Exemples

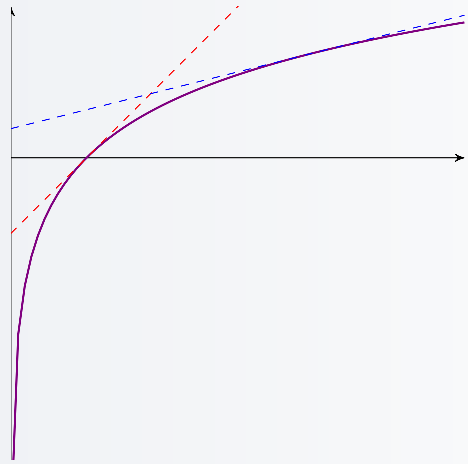
- La fonction f, dont la courbe représentative est :



est **convexe** car la courbe est toujours au-dessus de ses tangentes.

Exemples (suite)

- La fonction f, dont la courbe représentative est :



est **concave** car la courbe est toujours en-dessous de ses tangentes.

Définition

Point d'inflexion

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Sa courbe représentative admet un `point d'inflexion` pour $x = a$ si $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = a$.

Exemples

- La courbe représentative de $f : x \mapsto x^3$ admet un point d'inflexion en $x = 0$ car $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ et $\begin{cases} f''(0) = 0 \\ f''(x) < 0 \text{ pour } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ pour } x > 0 \end{cases}$.
- La courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto x^2$ n'admet pas de point d'inflexion en $x = 0$ car $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$ et donc $g''(0) \neq 0$.
- La courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto x^4$ n'admet pas de point d'inflexion en $x = 0$ car $h'(x) = 4x^3$, $h''(x) = 12x^2$ et donc $\begin{cases} f''(0) = 0 \\ f''(x) > 0 \text{ pour } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ pour } x > 0 \end{cases}$.

  (la dérivée seconde ne change pas de signe donc il n'y a pas de point d'inflexion)