Équations polynomiales de degré 3

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Article

par
Stéphane PASQUET

18 juin 2022

Première approche

Considérons l'équation polynomiale de degré 3 suivante :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{1}$$

Ce dont nous pouvons être assurés, c'est qu'elle admet au moins une solution réelle. En effet, la fonction :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et, de plus,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (ax^3) = \text{sgn}(-a)\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (ax^3) = \text{sgn}(a)\infty \end{cases}$$

où $\text{sgn}(a)$ désigne le signe de a.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Transformation de Tschirnhaus

Dans un premier temps, nous allons transformer l'équation (1) :

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

On pose alors $x = X - \dfrac{b}{3a}$

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \left(X - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(X - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(X - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow X^3 - \frac{b}{a}X^2 + \frac{b^2}{3a^2}X - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b}{a}\left(X^2 - \frac{2b}{3a}X + \frac{b^2}{9a^2}\right) + \frac{c}{a}X - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow X^3 + \left(\frac{b^2}{3a^2} - \frac{2b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)X - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow X^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)X + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = 0
\end{aligned}$$

On peut donc simplifier l'équation (1) en :

$$X^3 + pX + q = 0 \tag{2}$$

avec :

$$\begin{cases} p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2} \\ q = \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3} \end{cases}$$

Méthode de Hudde [1]

La méthode de Hudde consiste à poser dans l'équation (2) :

$$X = u + v$$

en remarquant l'égalité suivante :

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

Et donc :

$$(u+v)^3 - u^3 - 3u^2v - 3uv^2 - v^3 = 0$$

On en déduit alors :

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$$

Soit :

$$X^3 - 3uvX - (u^3 + v^3) = 0 \tag{3}$$

Pour que les équations (2) et (3) soient semblables, on pose alors :

$$\begin{cases} p = -3uv \\ q = -(u^3 + v^3) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

Formule de Cardan-Tartaglia [2]

En posant $U = u^3$ et $V = v^3$, on s'aperçoit que l'on doit chercher deux nombres U et V connaissant leur somme S et leur produit P. Ainsi, U et V sont solutions de l'équation :

$$Y^2 - SY + P = 0$$

Soit :

$$Y^2 + qY - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{4}$$

1. Johann Hudde, 1630-1704, mathématicien hollandais
2. Girolamo Cardano, 1501-1576 et Niccolò Fontana, dit Targaglia (littéralement, « le bègue »), 1499-1557, mathématiciens italiens.

Le discriminant du polynôme $Y^2 + qY - \dfrac{p^3}{27}$ est :

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

Pour que l'équation (4) ait au moins une solution, il faut que $\Delta \geqslant 0$, soit :

$$27q^2 + 4p^3 \geqslant 0$$

Sous cette dernière condition, on a :

$$U = \frac{-q - \sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}}{2} \qquad \text{et} \qquad V = \frac{-q + \sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}}{2}$$

Et donc :

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}}{2}} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}}{2}}$$

Ainsi, une solution à l'équation (2) est :

$$X = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{27}}}{2}}$$

Un exemple au hasard (ou presque ...)

Considérons l'équation :

$$(E)\ :\ 2x^3 - 5x^2 + 4x - 21 = 0$$

On pose alors :

$$\begin{cases} p = \frac{3\times2\times4-(-5)^2}{3\times2^2} = \frac{-1}{12} \\ q = \frac{2\times(-5)^3-9\times2\times(-5)\times4+27\times2^2\times(-21)}{27\times2^3} = -\frac{2158}{216} \end{cases}$$

Ainsi :

$$(E) \Leftrightarrow X^3 - \frac{1}{12}X - \frac{1\,079}{108} = 0$$

On a alors :

$$\Delta = \sqrt{\frac{2\,695}{27}} \approx 9,99073645$$

Et donc :

$$u \approx 0,012897285$$
$$v \approx 2,153769382$$

Soit :

$$X = u = v \approx 2,166666667$$

Et donc, finalement :

$$x = X + \frac{5}{6} = 3$$

Si on remplace x par 3 dans (E), on vérifie bien que $x = 3$ est une de ses solutions.

Une étude de Bombelli [3]

Bombelli a étudié l'équation :

$$X^3 - 15X - 4 = 0$$

Il a obtenu :

$$\Delta = -13\,608$$

Et donc :

$$X = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

Que l'on peut aussi écrire, en faisant fi du fait que l'on ait un radicant négatif pour la racine carrée :

$$X = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Bombelli s'est alors aperçu que :

$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$$

Ainsi :

$$X = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4$$

Ainsi, en concevant que $\sqrt{-1}$ existe, il s'aperçut que cela ne gênait pas les calculs, qui menaient tout de même à une solution.

N.B. C'est ainsi que les *nombres complexes* firent leur apparition, nombres s'écrivant sous la forme $a + b\sqrt{-1}$ ou, en posant $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $a + \mathrm{i}b$.

Algorithme

Comme vous l'avez constaté, les calculs peuvent être assez fastidieux. Nous pouvons donc avoir recours à un algorithme pour déterminer une solution. Je vous en propose un :

Cet algorithme a été testé avec `Algobox`, dont vous trouverez le code après l'algorithme.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  q EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  v EST_DU_TYPE NOMBRE
  delta EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  s EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
```

3. Raphaël Bombelli, 1526-1572, mathématicien italien

```
    LIRE c
    LIRE d
    p PREND_LA_VALEUR (3*a*c-b*b)/(3*a*a)
    q PREND_LA_VALEUR (2*pow(b,3)-9*a*b*c+27*a*a*d)/(27*pow(a,3))
    delta PREND_LA_VALEUR (27*q*q+4*pow(p,3))/27
    AFFICHER "DELTA="
    AFFICHER delta
    SI (delta>=0) ALORS
      DEBUT_SI
      u PREND_LA_VALEUR (-q-sqrt(delta))/2
      v PREND_LA_VALEUR (-q+sqrt(delta))/2
      s PREND_LA_VALEUR u/2
      POUR i ALLANT_DE 1 A 50
        DEBUT_POUR
        s PREND_LA_VALEUR (2*s+u/(s*s))/3
        FIN_POUR
      u PREND_LA_VALEUR s
      s PREND_LA_VALEUR v/2
      POUR i ALLANT_DE 1 A 50
        DEBUT_POUR
        s PREND_LA_VALEUR (2*s+v/(s*s))/3
        FIN_POUR
      v PREND_LA_VALEUR s
      AFFICHER "Une solution est : x="
      s PREND_LA_VALEUR u+v-b/(3*a)
      AFFICHER s
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        AFFICHER "DELTA<0 donc il faut passer par les nombres
        complexes."
        FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

N.B. 1 Dans l'algorithme, notons la partie :

Algorithme 1

```
Pour i allant de 1 à 50
   (2*s+u/(s*s))/3→s
Fin du Pour  s→u
```

Cette boucle permet de calculer $\sqrt[3]{u}$. Avec AlgoBox, il n'est pas possible de la calculer directement, donc j'ai dû utiliser la suite $\begin{cases} u_0 = \frac{u}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{u}{u_n^2}\right) \end{cases}$, qui converge vers $\sqrt[3]{u}$.
Pour calculer $\sqrt[3]{v}$, j'ai fait appel à la même suite, d'où la présence de deux boucles.

N.B. 2 Notez aussi que, malheureusement, cet algorithme ne fonctionne pas lorsque le discriminant est négatif.