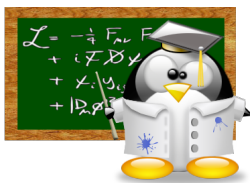




Sommaire

Probabilités conditionnelles	2
Probabilité d'une intersection	2
Probabilité conditionnelle d'un événement contraire	2
Partition	3
Formule des probabilités totales (version light)	3
Arbre pondéré : représentation des probabilités conditionnelles	3
Formule des probabilités totales (version complète)	3



Prérequis

- Probabilités élémentaires
- Loi de probabilités
- Variable aléatoire
- Loi binomiale

Définition

Probabilités conditionnelles

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.

On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé** le nombre noté $P_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Propriété

Probabilité d'une intersection

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

Démonstration

Elle découle de la définition : l'égalité des produits en croix mène à la propriété. ■

Exemple

Dans une urne, on place 10 boules, 3 noires et 7 rouges. On tire au hasard 3 boules, successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?

En notant :

- N_1 l'événement « la boule tirée est noire au 1^{er} tirage »,
- N_2 l'événement « la boule tirée est noire au 2^e tirage »,

la probabilité demandée est $P(N_1 \cap N_2)$.

- $P(N_1) = \frac{3}{10}$ car il y a 3 boules noires sur 10 lors du 1^{er} tirage ;
- $P_{N_1}(N_2) = \frac{2}{9}$ car il ne reste plus que 2 boules noires sur 9 au 2^e tirage si l'on sait que l'on a déjà tiré une boule noire au 1^{er} tirage.

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap N_2) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Propriété

Probabilité conditionnelle d'un événement contraire

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B).$$

Démonstration

Par définition,

$$P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)}.$$

Or,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}),$$

d'où :

$$\begin{aligned} P_A(\bar{B}) &= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= 1 - P_A(B). \end{aligned}$$

■

Définition

Partition

On dit que les n événements A_1, \dots, A_n forment une partition de Ω si :

- tous les événements sont incompatibles deux à deux : $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Remarque

Quel que soit l'événement A , A et \bar{A} forment une partition de l'univers.

Propriété

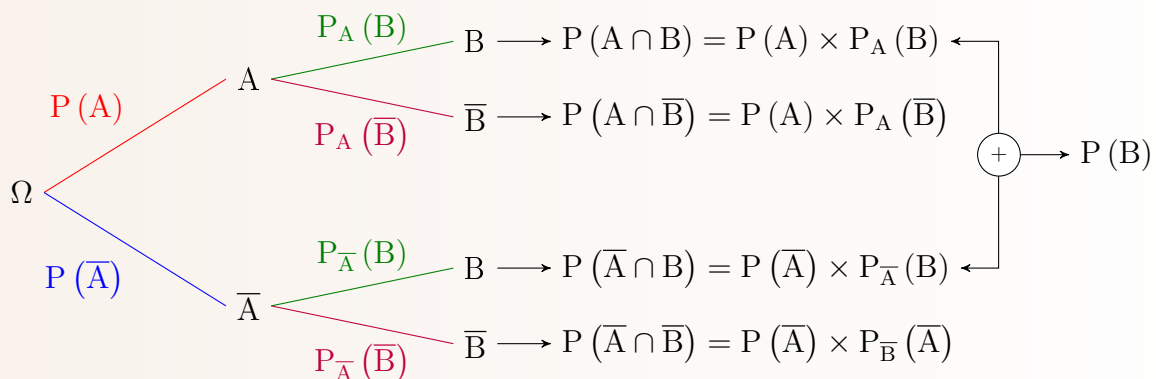
Formule des probabilités totales (version light)

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B).$$

Méthode

Arbre pondéré : représentation des probabilités conditionnelles



Propriété

Formule des probabilités totales (version complète)

Soient A_1, A_2, \dots, A_n n événements formant une partition de l'univers, avec $P(A_k) \neq 0$, $1 \leq k \leq n$. Alors, pour tout événement B ,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B).$$

Démonstration

Les événements $A_k \cap B$ sont incompatibles deux à deux.

De plus,

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B).$$

Donc,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B). \quad \blacksquare$$

Exemple

Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines. Toutes les pièces sont vérifiées par le service qualité. Ce service a fourni le tableau suivant après une journée de production.

N° de la machine utilisée	1	2	3
Pourcentage de pièces produites	50	35	15
Fréquence des défauts par machine	0,01	0,02	0,06

On prend au hasard une pièce produite dans la journée.

Déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

On convient de noter :

- M_k l'événement : « La pièce provient de la machine n° k » ;
- D l'événement : « La pièce est défectueuse ».

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3) \\ &= P(M_1) \times P_{M_1}(D) + P(M_2) \times P_{M_2}(D) + P(M_3) \times P_{M_3}(D) \\ &= 0,5 \times 0,01 + 0,35 \times 0,02 + 0,15 \times 0,06 \\ &= 0,0212. \end{aligned}$$