Disponible sur *mathweb.fr*

211 exercices de mathématiques pour Terminale S

Enseignement obligatoire et de spécialité

Stéphane PASQUET

3 juin 2018

Sommaire

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

3 juin 2018

Enseignement obligatoire

Enseignement de spécialité

Règles de navigation

Disponible sur http://www.mathweb.fr

3 juin 2018

Bonjour.

J'ai souhaité créé ici un document dans lequel il est facile de naviguer. C'est la raison pour laquelle :

- À chaque énoncé d'exercices, vous pouvez cliquer sur le numéro de la page où se trouve le corrigé pour vous y rendre directement ;
- Inversement, quand vous lisez un exercice, vous pouvez cliquer sur « [Retour à l'énoncé de l'exercice] » pour revenir à l'énoncé ;
- À tout moment, vous pouvez retourner au sommaire en cliquant sur le petit carré ■ qui se trouve devant chaque titre.

D'autre part, il se peut que malgré la vigilance que j'ai apportée à la relecture de ce document, quelques erreurs soient encore présentes.
Dans le doute, n'hésitez pas à me contacter via le formulaire qui se trouve sur mon site :

mathweb.fr

en mentionnant l'email avec lequel vous avez acquis ce document. J'y répondrai le plus rapidement possible.

Je vous souhaite un bon travail !

Stéphane Pasquet

Ce livre est exclusivement vendu sur* mathweb.fr *au prix de 5,99 €.
Ses éventuelles mises à jour (corrections) sont gratuites pendant 1 an (à partir de la date d'achat) pour toute personne l'ayant acheté sur ce site.

Je remercie donc tout acheteur de garder ce document pour son usage personnel. En effet, j'ai mis plusieurs années à le mettre au point et je continue à le modifier régulièrement. Aussi, si je constate qu'il ne me rapporte pas assez par rapport au temps que j'y consacre, je cesserais de travailler dessus, ce qui serait regrettable pour les années à venir, sachant que les programmes peuvent changer.

N'hésitez pas à laisser sur la page* https://www.mathweb.fr/web/exercices-terminale-S *un commentaire sur ce document afin de me faire part de votre avis.

Première partie

Enseignement obligatoire

Continuité & dérivabilité

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Ⓐ Exercices d'application du cours

Ⓡ Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

3 juin 2018

Calculs de limites

■ Exercice 1. Calculs élémentaires en $+\infty$

★☆☆☆☆ Ⓡ

Corrigé page 7 ✌

Calculer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$.

1 $f(x)=x^3+4x^2-5x+1$

2 $g(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$

3 $h(k)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4 $k(x)=\dfrac{x^2+1}{\sin\frac{1}{x}}$

■ Exercice 2. En $+\infty$ avec des formes indéterminées

★★☆☆☆ Ⓡ

Corrigé page 8 ✌

Calculer les limites suivantes.

1 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-1}$

2 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}\right)$

3 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)$

4 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+1}\right)$

■ Exercice 3. En un nombre fini avec des formes indéterminées

★★★☆☆ Ⓡ

Corrigé page 9 ✌

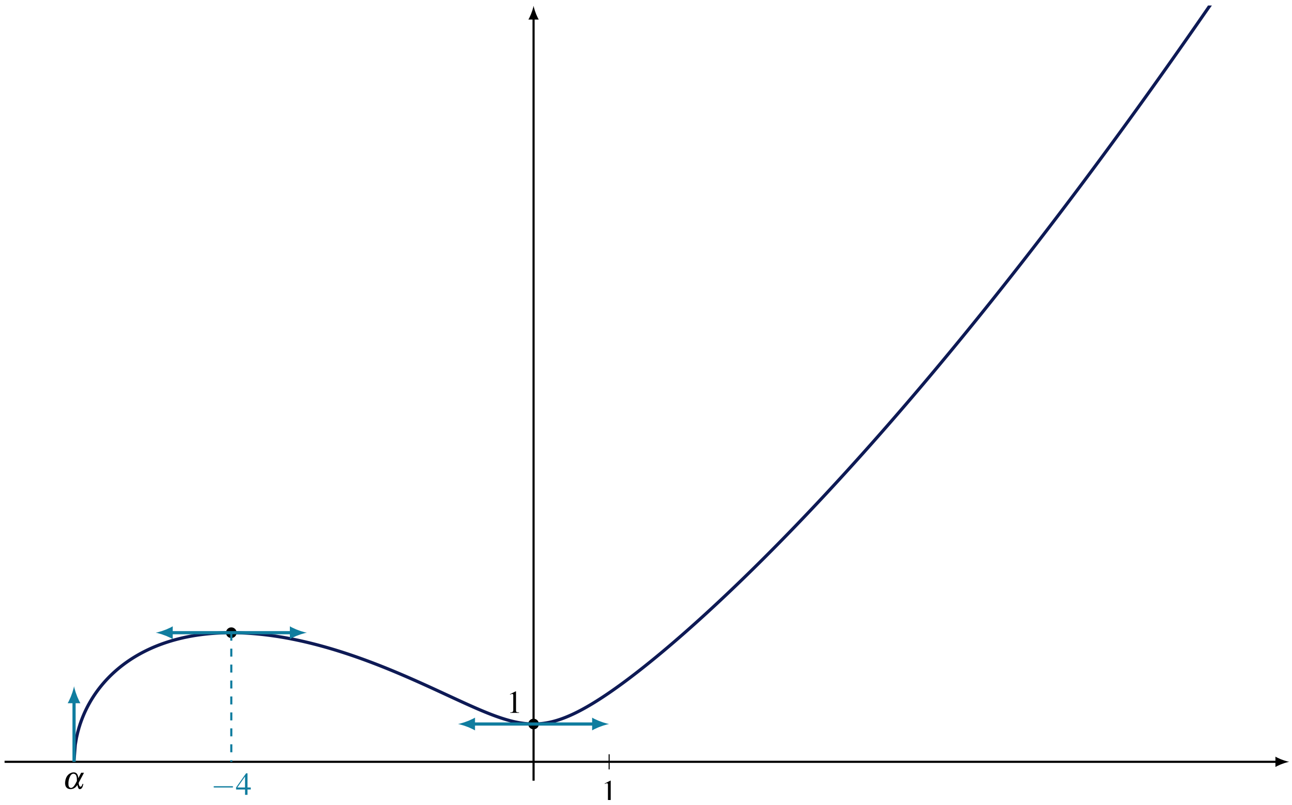
Calculer les limites suivantes.

1 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

2 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2}$

3 $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}$

4 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$



■ Corrigé de l'exercice 8.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 On peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x}\,(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)} \quad \text{pour } x \neq 0 \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} \end{aligned}$$

Or,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (2\sqrt{x}-1) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}+1\right) = 1$

Ainsi, par quotient,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

2 *a.* f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 2x - \sqrt{x} \qquad v(x) = 2 + \sqrt{x}$$

$$u'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Il faut donc que :

$$\begin{aligned} 2x^3-3x+1 &= (x-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c \\ &= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c \end{aligned}$$

D'où $a=2$, $c=-1$ et donc $b=2$.
Ainsi, $f'(x)=\dfrac{(x-1)(2x^2+2x-1)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.
Le dénominateur de $f'(x)$ étant toujours strictement positif sur $\left]-1\,;-\dfrac{1}{2}\right[$, $f'(x)$ est du signe de son numérateur.
Le discriminant de $2x^2+2x-1$ est $\Delta=12$, donc ce dernier a deux racines réelles distinctes : $x_1=\dfrac{-2-2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.
$x_1<-\dfrac{1}{2}$ et $x_2\in\left]-\dfrac{1}{2}\,;1\right[$. D'où le tableau suivant :

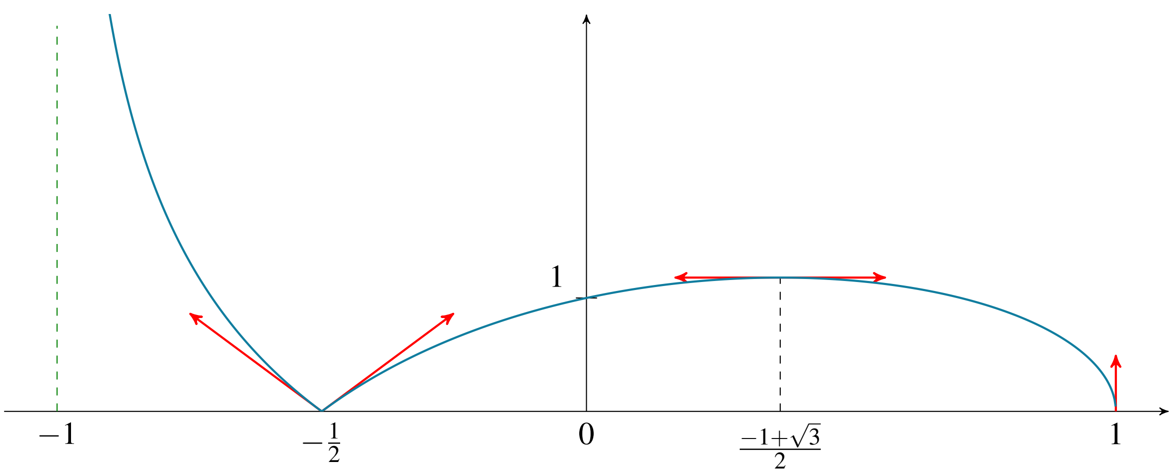
x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		1
$x-1$		$-$		$-$	
$2x^2+2x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$f(x_2)=\frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2\sqrt{3}}}$$

8 Le tableau de variations complet de f est :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		1
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On a alors la courbe suivante :



- D'après l'exercice précédent, $f'(x) = \dfrac{2x\left[1-\ln\left(x^2+1\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^2}$.

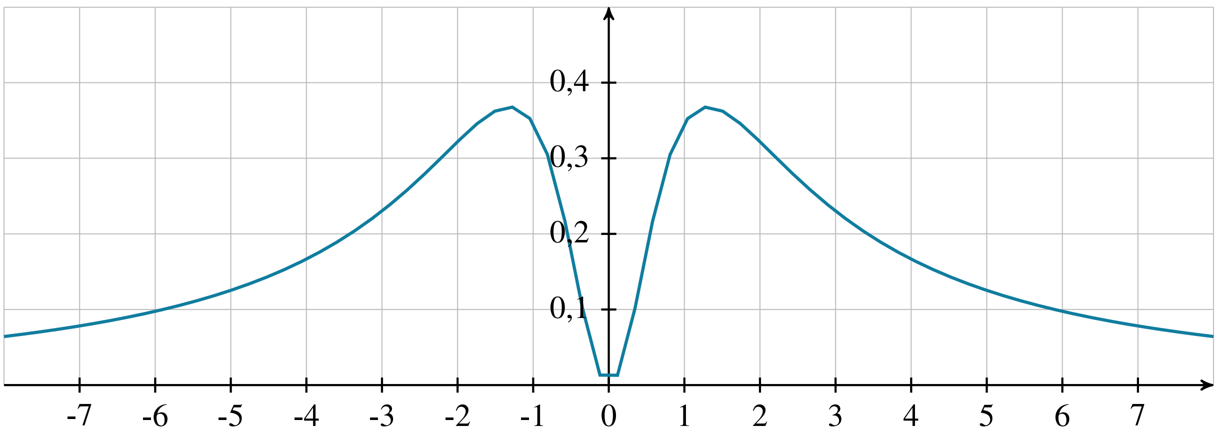
  Sur $[0\,;+\infty[$, $2x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln\left(x^2+1\right)$.

  $$\begin{aligned} 1-\ln\left(x^2+1\right) > 0 &\iff \ln\left(x^2+1\right) < 1 \\ &\iff x^2+1 < \mathrm{e}^1 \\ &\iff x^2 < \mathrm{e}-1 \\ &\iff 0 < x < \sqrt{\mathrm{e}-1} \end{aligned}$$

  On obtient alors le tableau de variations suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\mathrm{e}-1}$		0		$\sqrt{\mathrm{e}-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

  $$\begin{aligned} f\left(\sqrt{\mathrm{e}-1}\right) &= \frac{\ln(\mathrm{e}-1+1)}{\mathrm{e}-1+1} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$



■ Corrigé de l'exercice 9.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 Il faut que $1+\dfrac{1}{x} > 0$, ou encore $\dfrac{x+1}{x} > 0$. En étudiant le signe de ce quotient, on trouve :

$$\mathscr{D}_f =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[.$$

2 $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

On sait que sur $\mathscr{D}_f$, $1+\dfrac{1}{x} > 0$ donc $f'(x) < 0$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

et

$$X_2 = \frac{9 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \left(9 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)}{6} = 3.$$

Ainsi,

$$\cos x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos x_2 = 3 \text{ (impossible car } 3 > 1) \text{ ,}$$

soit :

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{ou} x_1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Finalement, on a :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right\}}$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

1 $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geqslant 0.$

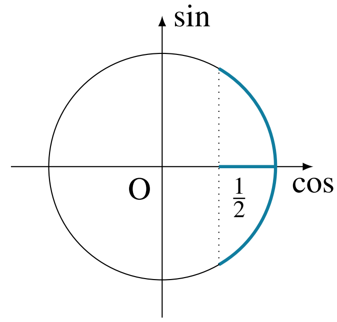
D'après l'exercice précédent, le polynôme $2X^2 - 3X + 1$ se factorise sous la forme :

$$2(X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right).$$

Ainsi,

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 2(\cos x - 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right).$$

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc $-2 \leqslant \cos x - 1 \leqslant 0$
- $\cos x - \dfrac{1}{2} > 0 \iff \cos x > \dfrac{1}{2}$
  $\iff x \in \left[-\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right]$



D'où le tableau suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos x - 1$		$-$		$-$		$-$	0
$\cos x - \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$2\cos^2 x - 3\cos x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	0

L'ensemble solution de l'inéquation est donc :

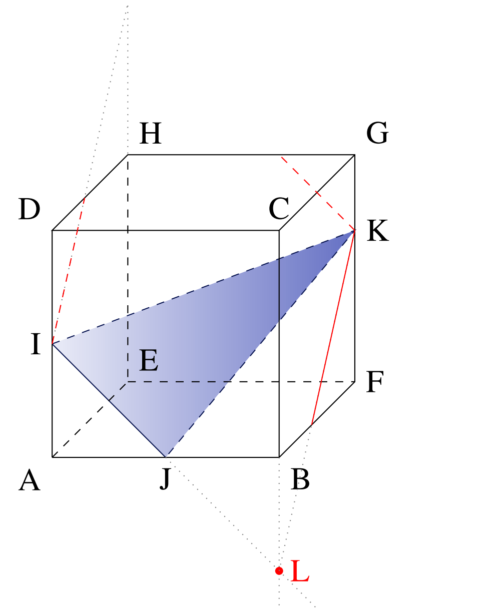
$$\boxed{\mathscr{S} = \left[-\pi\ ;-\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}\ ;\pi\right]}$$

2 $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 < 0.$

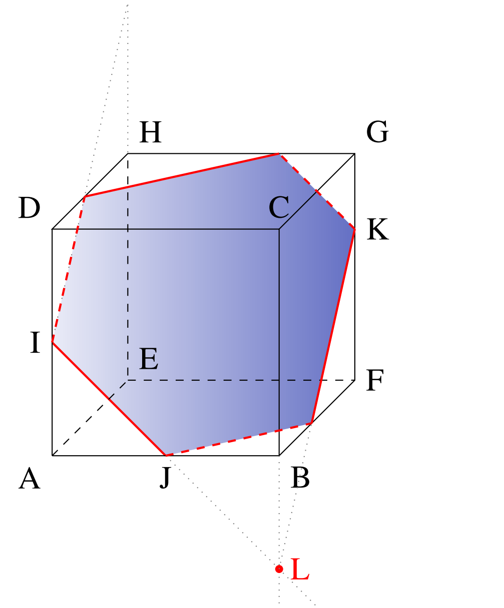
D'après l'exercice précédent,

$$2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 2(\sin x + 2)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right).$$

De même, la section de la face (EFGH) par (IJK) est une droite parallèle à (IJ) passant par K :



Il ne reste plus qu'à fermer la figure en rouge et nous obtenons la section du cube par le plan (IJK) :



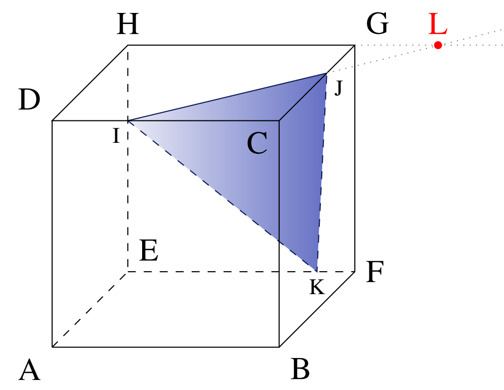
■ Corrigé de l'exercice 3.

[Retour à l'énoncé de l'exercice]

Étape 1 : on prolonge la droite (IJ) car I et J sont sur la même face.

Nous trouvons ainsi l'intersection de (IJ) et (HG) : on nomme ce point L.

Pourquoi chercher l'intersection de (IJ) avec (HG) ? Parce que le troisième point (K) est sur la face (EFGH) et que (HG) est aussi sur cette face.
(IJ) coupe aussi (DH), mais (DH) n'est pas incluse dans (EFGH).



Deuxième partie

Enseignement de spécialité

Arithmétique

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Énoncés

3 juin 2018

(A) Exercices d'application du cours

(R) Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Division euclidienne – Multiples et diviseurs

■ Exercice 1. Critère de divisibilité

★☆☆☆☆ A
Corrigé page 271

On pose $A_n = 2n^2 + 11n + 32$ et $B_n = n + 3$ pour tout entier relatif n.
On se demande pour quelles valeurs de n B_n divise A_n.

1. Montrer que $A_n = (n+3)(2n+5) + 17$.
2. Conclure.

■ Exercice 2. Avec une somme géométrique

★☆☆☆☆ A
Corrigé page 271

On souhaite démontrer que $5^n + 19$ est toujours divisible par 4 pour tout entier naturel n.

1. Exprimer de façon plus simple la somme $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1}$ en fonction de n.
2. Conclure.

■ Exercice 3. Divisibilité par 2 et 3

★★☆☆☆ R
Corrigé page 272

Démontrer que pour tout entier relatif p, $p(p^2-1)$ est divisible par 2 et par 3.

■ Exercice 4. Divisibilité par 8

★★☆☆☆ R
Corrigé page 272

Démontrer que pour tout entier naturel n impair, $n^2 - 1$ est divisible par 8.

■ Exercice 5. Reste de la division euclidienne par 11

★★★☆☆ R
Corrigé page 273

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 100 par 11, de 1 000 par 11, de 10 000 par 11, de 100 000 par 11.
   Quelle conjecture peut-on alors faire ?
2. Démontrer la conjecture.

Calculs matriciels

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Ⓐ Exercices d'application du cours

Ⓡ Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

3 juin 2018

Opérations sur les matrices

■ Exercice 1. Opérations élémentaires

★☆☆☆☆ Ⓐ
Corrigé page 297

On donne les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 6 & -1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

1. Calculer $A+B$.
2. Calculer $2A$.
3. Calculer AC.
4. Calculer CA.

■ Exercice 2. À la recherche d'une matrice

★★☆☆☆ Ⓡ
Corrigé page 298

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $AI=IA=A$.
2. Trouver la matrice $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ telle que $AB=I$.
3. Vérifier que $BA=I$.

■ Exercice 3. Puissance d'une matrice et raisonnement par récurrence

★★★☆☆ Ⓡ
Corrigé page 298

On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $(I+A)^n=I+nA$.
3. En déduire une expression de B^n en fonction de n.