Aire entre trois cercles tangents

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Article

par
Stéphane PASQUET

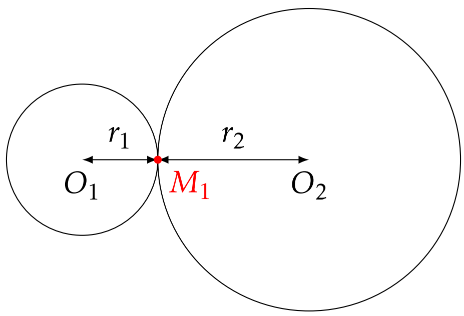
6 septembre 2018

1 Objectifs

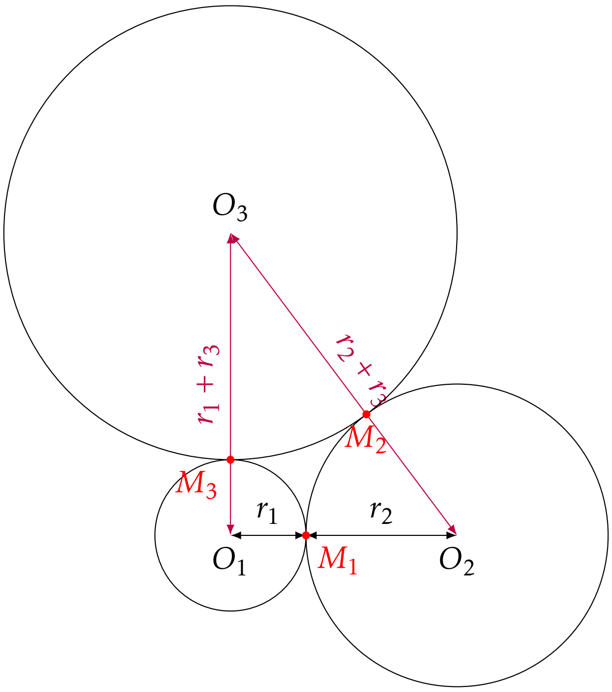
Cet article a pour objectifs de construire trois cercles tangents de rayons différents et de calculer l'aire du domaine compris entre ces trois cercles.

2 Construction

Rappelons que deux cercles tangents sont deux cercles qui se coupent en un unique point.
Ainsi, trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ tangents sont tels que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \{M_i\}$, avec $i \neq j$, $i \in [\![1\ ;\ 3]\!]$ et $j \in [\![1\ ;\ 3]\!]$.
Notons r_i et O_i respectivement le rayon et le centre de $\mathcal{C}_i$, $i \in [\![1\ ;\ 3]\!]$.
Construire $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est aisé : il suffit de tracer le segment $[O_1O_2]$ de longueur $r_1 + r_2$.

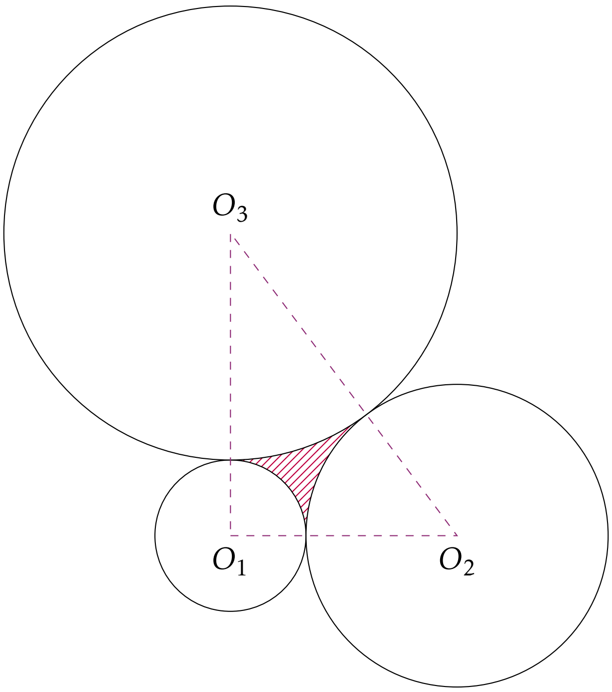


Nous cherchons donc à construire $\mathcal{C}_3$, de rayon r_3 de sorte qu'il soit tangent aux deux cercles.
On doit alors avoir $O_1O_3 = r_1 + r_3$ et $O_2O_3 = r_2 + r_3$.
On peut ainsi construire le cercle de centre O_1 et de rayon $r_1 + r_3$, puis le cercle de centre O_2 de rayon $r_2 + r_3$. Ces deux cercles sont sécants en un point qui est O_3.
Pour construire $\mathcal{C}_3$, il suffit de tracer le cercle de centre O_3 passant par le point d'intersection de $[O_1O_3]$ et de $\mathcal{C}_1$ (par exemple).



3 Aire du domaine entre les trois cercles

Ce qui nous intéresse est l'aire du domaine hachuré représenté ci-dessous :



Théoriquement, son aire est obtenue en soustrayant à l'aire du triangle $O_1O_2O_3$ la somme des aires des secteurs angulaires de centres O_1, O_2 et O_3.
À ce stade, nous ne connaissons que O_1O_2, O_2O_3 et O_1O_3.
À l'aide de la formule de Héron, on peut déterminer l'aire du triangle $O_1O_2O_3$ et à l'aide de la formule d'Al-Kashi, nous pouvons trouver la mesure des angles $\widehat{O_2O_1O_3}$, $\widehat{O_1O_3O_2}$ et $\widehat{O_3O_2O_1}$.

- **Aire de $\mathbf{O_1O_2O_3}$:**

  $\mathcal{A}_T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, avec $a = O_1O_2$, $b = O_2O_3$, $c = O_3O_1$ et $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

- **Aire du secteur angulaire de centre O_1 :**

  Je note $\alpha_1 = \widehat{O_1}$ dans le triangle $O_1O_2O_3$.

  Avec les notations précédentes, on a :

  $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha_1\,,$$

  soit :

  $$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right).$$

  Ainsi, l'aire du secteur angulaire correspondant est égale à :

  $$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 r_1^2 = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)r_1^2.$$

  (Je conviens ici d'exprimer les angles en radians)

- **Aire des secteurs angulaires de centres O_2 et O_3 :**

  En notant $\alpha_2 = \widehat{O_2}$ et $\alpha_3 = \widehat{O_3}$ dans le triangle $O_1O_2O_3$, et en utilisant ce que nous venons de faire précédemment, on a :

  $$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \qquad \text{et} \qquad \alpha_3 = \arccos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right).$$

  Ainsi, l'aire des secteurs angulaires correspondant respectivement à α_2 et α_3 sont égales à :

  $$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)r_2^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}_3 = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)r_3^2.$$

- **Aire du secteur hachuré :**

  $$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_T - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3\\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - \frac{1}{2}\left[\arccos\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)r_1^2\right.\\ &\qquad\qquad \left. + \arccos\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)r_2^2 + \arccos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)r_3^2\right].\end{aligned}$$

4 Application

Sur le schéma fait en début de section 3, j'ai pris $r_k = k$ cm. On a alors :
$a = 1+2 = 3$, $b = 2+3 = 5$, $c = 1+3 = 4$ et donc $p = \frac{1}{2}(3+5+4) = 6$, ce qui donne :

$$\mathcal{A} = \sqrt{6\times3\times1\times2} - \frac{1}{2}\left(1^2\times\arccos\frac{9+16-25}{2\times3\times4} + 2^2\times\arccos\frac{9+25-16}{2\times3\times5} + 3^2\times\arccos\frac{25+16-9}{2\times5\times4}\right)$$
$$\mathcal{A} = 6 - \frac{1}{2}\left(\arccos 0 + 4\arccos\frac{3}{5} + 9\arccos\frac{4}{5}\right)$$
$$\mathcal{A} \approx 0{,}464\ \text{cm}^2.$$