Les problèmes de Sam loyd

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Article

par
Stéphane PASQUET

13 septembre 2018

Sommaire

1 Introduction

Sam Loyd (1841 – 1911) est ce que je pourrais appeler un « récréateur de problèmes mathématiques » : il a créé des problèmes mathématiques se voulant récréatifs.
Dans un autre article, je vous parlais du jeu du taquin. Et bien, c'est Sam Loyd qui popularisa ce jeu.
En voici quelques uns que je trouve intéressants.

2 Le problème du nénuphar (niveau 3e)

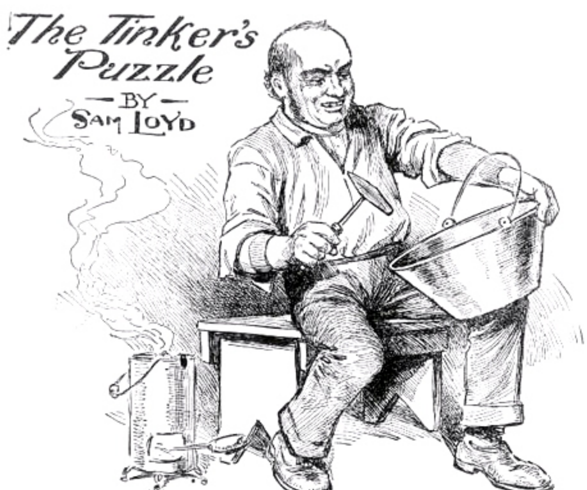
Un nénuphar se trouve à 10 cm au-dessus de la surface de l'eau. Si on le tire de côté, il disparaît à 21 cm de l'endroit où il se trouvait.
Quelle est la profondeur de l'eau ?

La schématisation du problème est la suivante :

Dans APN' rectangle en A : $PN'^2 = 21^2 + h^2$.
Or, $PN' = PN = h + 10$. Donc : $(h+10)^2 = 21^2 + h^2$, soit $20h + 10^2 = 21^2$. On en déduit alors que $20h = 21^2 - 10^2 = (21-10)(21+10) = 11 \times 31 = 341$.
Ainsi, $h = 341 \div 20 = 17,05$.

La hauteur de l'eau est donc de 17,05 cm.

3 Le problème de l'étameur (niveau 3e)



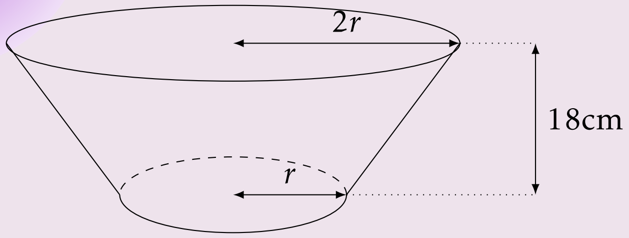
PROPOSITION—Tell the size of the kettle.

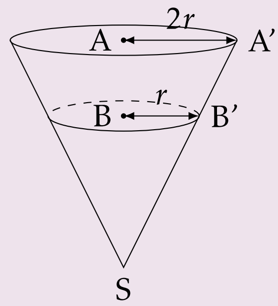
Cet étameur vient de terminer la fabrication de ce récipient à fond plat de 18 cm de profondeur et dont la contenance est de vingt-cinq litres.

Qui pourra nous indiquer le diamètre du haut de ce récipient sachant qu'il est le double de celui du fond ?

Solution

Le schéma du récipient est le suivant :





D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{SB}{SA} = \frac{r}{2r}$$

donc :

$$\frac{SA-18}{SA} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit alors :

$$1 - \frac{18}{SA} = \frac{1}{2},$$

soit :

$$\frac{18}{SA} = \frac{1}{2}$$

et donc :

$$SA = 36.$$

Le volume (en cm^3) du cône de sommet S et de base le cercle de centre A est :

$$\mathscr{V}_A = \frac{1}{3}\pi \times (2r)^2 \times 36 = 48\pi r^2.$$

Le volume (en cm^3) du cône de sommet S et de base le cercle de centre A est :

$$\mathscr{V}_B = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times 18 = 6\pi r^2.$$

Le volume (en cm^3) du récipient est donc :

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_A - \mathscr{V}_B = 42\pi r^2.$$

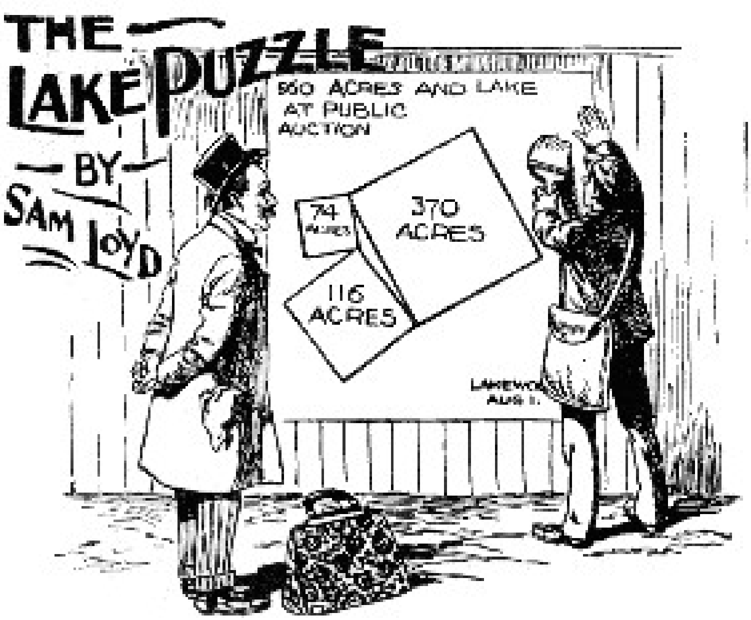
On sait que $\mathscr{V} = 25\ L = 25\ 000\ \text{cm}^3$, donc :

$$42\pi r^2 = 25\ 000 \qquad \text{soit} \qquad r^2 = \frac{25\ 000}{42\pi}.$$

On obtient alors $r \approx 13{,}76$.

Le diamètre du haut du récipient est donc de 27,5 cm.

4 Le puzzle du lac (niveau 3e)



Le lac est la partie entre les trois carrés dont les surfaces sont respectivement 370 acres, 74 acres et 116 acres.
Quelle est l'aire du lac ?

Solution

Les côtés du lac on pour mesure $a = \sqrt{370}$, $b = \sqrt{116}$ et $c = \sqrt{74}$.
Avec la formule de Héron, on calcule l'aire du triangle :

$$\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,$$

où $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.
On obtient $\mathscr{A} = 11$.

L'aire du lac est donc de 11 acres.

5 Comptez les voix (niveau 4e)

Lors d'un vote, 5 219 bulletins furent déposés dans une urne. Le vainqueur battait ses trois concurrents de respectivement 22, 30 et 73 voix. Cependant, personne ne put déterminer exactement le nombre de voix obtenues par chaque candidat. Pouvez-vous le faire ?

Solution

Notons n le nombre de voix obtenues par le vainqueur.
On arrive à l'équation :

$$n + (n-22) + (n-30) + (n-73) = 5\,219\,, \qquad \text{soit} \qquad 4n - 125 = 5\,219.$$

On trouve alors $n = \dfrac{5\,219 + 125}{4} = 1\,336$.

Le nombre de voix obtenues par les quatre candidats sont respectivement 1 336, 1 263, 1 306 et 1 314.

6 Quel est l'âge de Fido ? (niveau 2$^{\text{nde}}$)

Charley Slowpop était sur le point de faire sa demande en mariage à son amie, lorsque le petit frère de celle- ci et son chien Fido entrèrent dans le salon.
« Tu ne peux pas connaître l'âge d'un chien à son collier, dit l'enfant terrible. Mais il y a cinq ans, ma sœur était cinq fois plus âgée que Fido et à présent, elle est trois fois plus âgée que lui ! »
Charley Slowpop est très curieux de savoir l'âge de Fido. Pouvez-vous l'aider ?

Solution

Notons f l'âge de Fido et s celui de la sœur à notre époque.

- Il y a 5 ans, $s-5=5(f-5)$, donc $s=5f-20$.
- À présent, $s=3f$.

De ces deux égalités, on obtient :

$$5f-20=3f \qquad \text{soit} \qquad f=10.$$

Fido a donc 10 ans.

7 Le problème du messager (niveau 1$^{\text{re}}$ S)

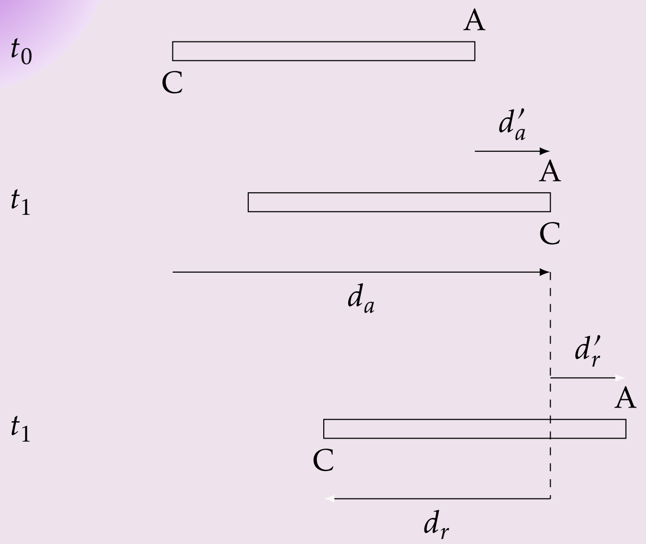
Un problème ancien, que l'on trouve dans de nombreux vieux livres de problèmes, concerne une armée de cinquante kilomètres de long.
Alors que l'armée avance à une vitesse constante, un messager part de l'arrière-garde de l'armée, galope pour aller délivrer un message à l'avant, puis revient à l'arrière garde.
Il arrive à l'arrière garde exactement au moment où l'armée a parcouru cinquante kilomètres.
Quelle est la distance totale parcourue par le messager ?

Solution

Notons :

- v_A la vitesse de l'armée ;
- v_c la vitesse du cavalier ;
- t_1 le temps « aller » du cavalier ;
- t_2 le temps « retour » du cavalier ;
- d_a la distance parcourue à l'« aller » pour le cavalier ;
- d_r la distance parcourue au « retour » pour le cavalier ;
- d'_a la distance parcourue à l'« aller » par l'armée ;
- d'_r la distance parcourue au « retour » par l'armée.

On peut représenter la situation à 3 instants :



On sait que :

1. $v_A = \dfrac{50}{t_1 + t_2}$ car l'armée parcourt 50 km en $t_1 + t_2$ heures. Donc, $t_1 + t_2 = \dfrac{50}{v_A}$.
2. $d_a = d'_a + 50$ car le cavalier est à 50 km de la tête de l'armée.
3. $d_r = 50 - d'_r$.

Le point 2. nous dit que, comme $v_c = \dfrac{d_a}{t_1}$ et $v_A = \dfrac{d'_a}{t_1}$, on a :

$$v_c t_1 = v_A t_1 + 50 \qquad \text{soit} \qquad t_1 = \frac{50}{v_c - v_A}.$$

Le point 3. nous dit de même que :

$$v_c t_2 = 50 - v_A t_2 \qquad \text{soit} \qquad t_2 = \frac{50}{v_c + v_A}.$$

Le point 1. nous donne alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{50}{v_c - v_A} + \frac{50}{v_c + v_A} = \frac{50}{v_A} \\
\Longleftrightarrow & \frac{2v_c}{v_c^2 - v_A^2} = \frac{1}{v_A} \\
\Longleftrightarrow & 2v_c v_A = v_c^2 - v_A^2 \\
\Longleftrightarrow & v_c^2 - 2v_c v_A - v_A^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow & \frac{v_c^2}{v_A^2} - 2\frac{v_c}{v_A} - 1 = 0 \qquad \text{en divisant par } v_A^2 \\
\Longleftrightarrow & V^2 - V - 1 = 0 \qquad \text{en posant } X = \frac{v_c}{v_A}
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $X^2 - 2X - 1$ est $\Delta = 8$ donc il y a deux solutions :

$$V = 1 - \sqrt{2} < 0 \qquad \text{ou} \qquad V = 1 + \sqrt{2} > 0.$$

v_A et v_c étant de même signe, $V > 0$ donc $V = 1 + \sqrt{2}$.
Ainsi, $v_c = (1 + \sqrt{2})v_A$.

On en déduit alors que :

$$t_1 = \frac{50}{(1+\sqrt{2})v_A - v_A} = \frac{50}{\sqrt{2}v_A} \quad \text{soit} \quad d_a = t_1 v_c = \frac{50(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 25(2+\sqrt{2})$$

et

$$t_2 = \frac{50}{(1+\sqrt{2})v_A + v_A} = \frac{50}{(2+\sqrt{2})v_A} \quad \text{soit} \quad d_r = t_2 v_c = \frac{50(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} = 25\sqrt{2}.$$

La distance parcourue par le cavalier est donc $d_a + d_r = 50(1+\sqrt{2})$.

Le cavalier aura donc parcouru à peu près 120,71 kilomètres.

8 L'agent mathématicien (niveau 4e)

« Bien le bonjour, monsieur l'agent, dit Mr Mc Guire. Pouvez-vous me dire l'heure ? »
« Mais bien sûr, répondit l'agent qui avait une réputation de mathématicien. Ajoutez au quart du temps depuis minuit, la moitié du temps jusqu'à minuit et vous aurez l'heure exacte. »

Quelle heure est-il donc ?

Solution

Notons h l'heure exacte.

On a alors l'équation :

$$\frac{1}{4}h + \frac{1}{2}(24-h) = h\,,$$

soit :

$$\frac{1}{4}h - \frac{1}{2}h - h = -12\,,$$

ou encore :

$$h = \frac{48}{5} = 9,6 = 9\ h + 0,6 \times 60\ \text{min}.$$

Il est donc exactement 9 h 36 min.

9 Quel est l'âge de Pocahontas ? (niveau 4e)

Smith, le fermier, et sa femme ont eu quinze enfants, nés à un an et demi d'intervalle.
Pocahontas, la plus âgée des enfants prétend être huit fois plus âgée que Captain John, le plus jeune de la couvée.

Quel est l'âge de Mademoiselle Pocahontas ?

Solution

Notons a l'âge de Captain John.
Alors, l'âge de Pocahontas est :

$$a+1,5\times 14 = a+21.$$

On sait aussi que l'âge de Pocahontas est 8 fois celui de Captain John, donc :

$$a+21 = 8a \qquad \text{soit} \qquad a=3.$$

Pocahontas a donc 24 ans.

10 Les trois mendiants (niveau 3^{e})

Une dame charitable rencontre un pauvre auquel elle donne la moité de l'argent qu'elle avait dans son porte- monnaie plus un franc. Le pauvre, qui est membre de l'association des mendiants unifiés, réussit en la remerciant à dessiner à la craie le signe de remerciement de l'association sur ses vêtements, ce qui permit à la dame de mener à bien son œuvre de charité au cours du reste de sa promenade.

Au deuxième solliciteur, elle donna la moitié de ce qui lui restait plus deux francs.

Au troisième, elle donna la moitié de ce qui lui restait plus trois francs.

À présent, il lui reste un seul franc.

Combien avait-elle au début de sa promenade ?

Solution

Notons x la somme que cette dame possédait au début de sa promenade.
Alors, après le premier mendiant, il lui reste :

$$x-\left(\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{1}{2}x-1.$$

Après le second, il lui reste :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x-1-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)+2\right] &= \frac{1}{2}x-1-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-2\\ &= \frac{1}{4}x-\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Après le troisième, il lui reste :

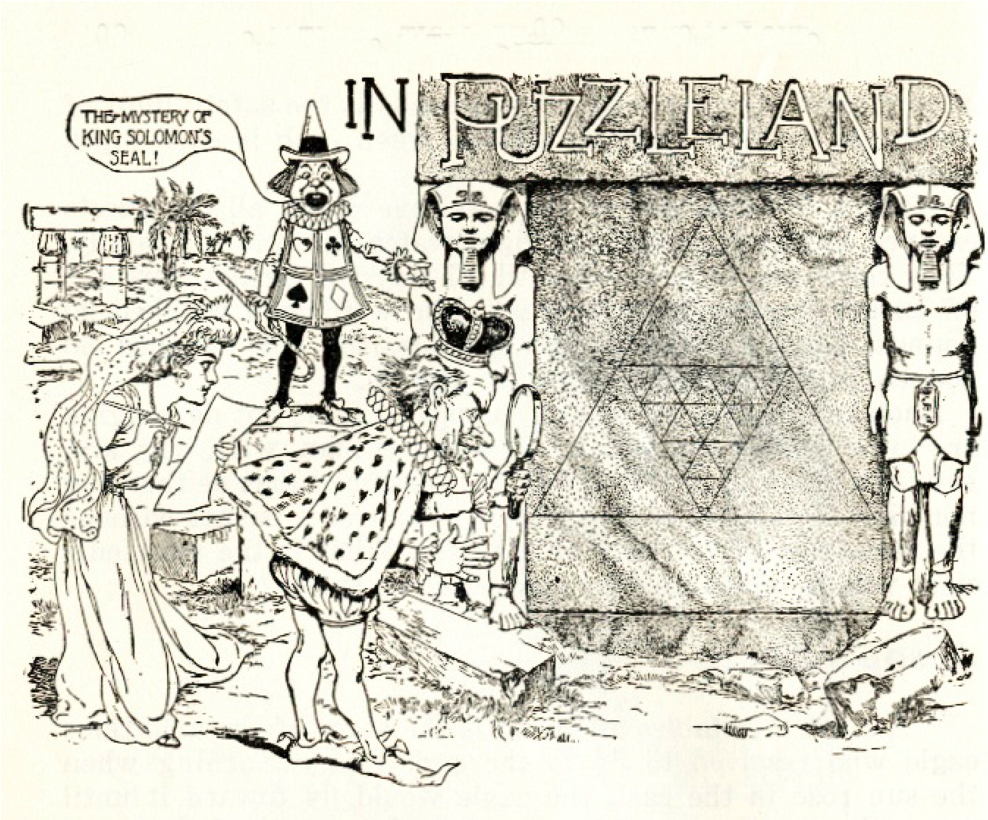
$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x-\frac{5}{2}\right)-3 &= \frac{1}{4}x-\frac{5}{2}-\frac{1}{8}x+\frac{5}{4}-3\\ &= \frac{1}{8}x-\frac{17}{4}.\end{aligned}$$

S'il ne lui reste qu'un franc, alors

$$\frac{1}{8}x-\frac{17}{4}=1 \qquad \text{soit} \qquad x=\left(1+\frac{17}{4}\right)\times 8 = 42.$$

La dame avait donc 42 francs au début de sa promenade.

11 Combien y a-t-il de triangles sur le sceau ? (tout niveau)



Le petit Tommy Riddles annonce que le roi Puzzlepate et la princesse Enigme cherchent le secret du sceau du roi Salomon, qui est gravé sur sa tombe. Le roi essaye de trouver le nombre de triangles équilatéraux que l'on voit sur le motif. Quel est votre avis ?

Solution

- Il y a d'abord le triangle extérieur (le plus grand) ; (1)
- Il y a ensuite les 4 triangles intérieurs (dont un central qui contient plein de petits triangles) ; (4)
- Dans le triangle intérieur, il y a 16 petits triangles ; (16)
- Dans le triangle intérieur, il y a 7 triangles formés de 4 petits triangles ; (7)
- Dans le triangle intérieur, il y a 3 triangles formés de 9 petits triangles ; (3)

Il y a donc 31 triangles équilatéraux en tout.

12 Le prix des œufs (niveau 2$^{\text{nde}}$)

« J'ai payé douze centimes les œufs que j'ai achetés chez l'épicier – expliquait le cuisinier – mais je lui ai demandé d'en ajouter deux gratuitement parce qu'ils étaient trop petits. J'ai donc payé mes œufs un centime de moins par douzaine. »

Combien d'œufs a acheté le cuisinier ?

Solution

Notons n le nombre d'œufs et p le prix normal d'un œuf.
On a d'une part :

$$12 = np\,, \qquad \text{donc} \qquad p = \frac{12}{n}\,,$$

car np désigne le prix de n œufs.
D'autre part, nous savons que le prix réellement payé d'un œuf est :

$$\frac{12}{n+2}.$$

Ainsi,

$$\frac{12}{n+2} \times 12 = 12 \times \frac{12}{n} - 1.$$

Cette dernière équation nous donne :

$$\frac{144}{n+2} = \frac{144-n}{n}$$

soit :

$$144n = (144-n)(n+2)\,,$$

ou encore :

$$n^2 + 2n - 288 = 0.$$

Le discriminant du polyôme $n^2 - 2n - 288$ est :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-288) = 1\ 156$$

donc il existe deux valeurs de n possibles :

$$n_1 = \frac{-2-\sqrt{1\ 156}}{2} = -18$$

et

$$n_2 = \frac{-2+\sqrt{1\ 156}}{2} = 16.$$

Une seule est possible car $n > 0$.

Le cuisinier a donc acheté en tout 18 œufs (16 + 2 gratuits).

13 Quel est l'âge de ce garçon ? (niveau 3e)

« Quel est l'âge de ce garçon ? » – demanda le contrôleur.
Le banlieusard, flatté de l'intérêt que l'on porte à sa famille, répondit : « Mon fils est cinq fois plus âgé que ma fille, ma femme est cinq fois plus âgée que mon fils, et je suis deux fois plus vieux que ma femme, tandis que ma grand-mère dont l'âge égale la somme de nous tous, fête aujourd'hui son quatre-vingt-et-unième anniversaire. »

Quel était l'âge de ce garçon ?

Solution

Notons :

- s l'âge du fils ;
- g l'âge de la fille ;
- f l'âge du père ;
- m l'âge de la mère.

Ainsi,

- $s = 5g$;
- $m = 5s$;
- $f = 2m$;
- $81 = s + m + g + f$.

De la dernière égalité, on déduit :

$$81 = s + 5s + \frac{1}{5}s + 10s \qquad \text{soit} \qquad 81 = \frac{81}{5}s \qquad \text{et donc} \qquad s = 5.$$

Le garçon a donc 5 ans.

14 Le problème du marché (niveau 2^nde^)

Un fermier et son épouse vont au marché échanger leurs poulets pour du bétail au taux de 85 poulets pour un cheval et une vache, 5 chevaux valant exactement autant que 12 vaches.

« John, dit la femme, prenons encore une fois autant de chevaux que nous en avons déjà pris. Nous n'aurons ainsi que 17 chevaux et vaches à nourrir cet hiver. »
« Je crois que nous devrions avoir plus de vaches que cela dit John. D'ailleurs, si nous avions 2 fois plus de vaches que jusqu'à maintenant, cela nous ferait 19 vaches et chevaux en tout et nous aurions juste assez de poulets à donner en échange. »

Combien les paysans ont-ils apporté de poulets au marché ?

Solution

La première phrase nous dit que :

$$85 \text{ poulets} = 1 \text{ cheval} + 1 \text{ vache} \qquad \text{et} \qquad 5 \text{ chevaux} = 12 \text{ vaches}.$$

On en déduit alors :

$$5 \times 85 \text{ poulets} = 5 \text{ chevaux} + 5 \text{ vaches}$$

soit :

$$425 \text{ poulets} = 17 \text{ vaches} \qquad \text{soit} \qquad 1 \text{ vache} = 25 \text{ poulets}.$$

Et donc,

$$5 \text{ chevaux} = 12 \text{ vaches} = 12 \times 25 \text{ poulets} = 300 \text{ poulets}$$

donc :

$$1 \text{ cheval} = 60 \text{ poulets}.$$

Notons maintenant :

- x le nombre de chevaux que le couple a déjà achetés ;
- y le nombre de vaches que le couple a déjà achetées.

Le dialogue entre le mari et la femme donne alors le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 17 & (L_1) \\ x + 2y = 19 & (L_2) \end{cases}$$

$2(L_2) - (L_1)$ donne : $3y = 38 - 17$, soit $y = 7$.
$2(L_1) - (L_2)$ donne : $3x = 34 - 19$, soit $x = 5$.

Le couple a donc déjà acheté 5 chevaux et 7 vaches.
Ainsi, s'il achète 7 vaches, il lui faut :

$$7 \times 25 \text{ poulets} = 175 \text{ poulets.}$$

Les paysans ont donc amené 175 poulets.

15 Le poids du bébé (niveau 3e)

Madame O'Toole est très économe. Elle essaye de se peser ainsi que son chien et son bébé avec une seule pièce[a]. La balance indique 170 livres. Si elle pèse cent livres de plus que le chien et le bébé réunis, et si le chien pèse soixante pour cent de moins que le bébé, combien pèse le cher ange ?

a. À l'époque de Sam Loyd, on pouvait aller à la pharmacie pour se peser, mais il fallait introduire une pièce pour que la balance fonctionne.

Solution

Notons :

- x le poids (en livres) de Madame O'Toole ;
- y le poids (en livres) de son chien ;
- z le poids (en livres) de son bébé.

Alors,

1. $x + y + z = 170$;
2. $x = 100 + y + z$;
3. $y = 0,4z$ (60% de moins que le bébé signifie 40% du poids du bébé).

L'égalité 2. donne, en considérant l'égalité 3. :

$$x = 100 + 0,4z + z = 100 + 1,4z.$$

Ainsi, l'égalité 1. donne, avec cette nouvelle égalité :

$$100 + 1,4z + 0,4z + z = 170 \qquad \text{soit} \qquad 2,8z = 70.$$

On trouve alors $z = 25$.

Le bébé pèse donc 25 livres.

16 Les deux dindes (niveau 1re S)

« Ces deux dindes pèsent 20 livres à elles deux », dit le boucher.
« La plus petite coûte 2 centimes de plus à la livre que la grande. »
Mme Smith a payé 82 centimes pour la petite et Mme Brown 2,96 F pour la grande.

Combien pesaient-elles chacune ?

Solution

Posons :

- x le poids (en livres) de la plus petite dinde ;
- y le poids (en livres) de la plus grosse dinde.

On a alors :

1. $x + y = 20$, ou encore $x = 20 - y$;
2. $\dfrac{82}{x} = 2 + \dfrac{296}{y}$, soit $\dfrac{82}{x} = \dfrac{2y+296}{y}$ ou encore : $82y = x(2y+296) = (20-y)(2y+296)$.

   En développant, on obtient l'équation :

   $$2y^2 + 338y - 5\,920 = 0 \qquad \text{soit} \qquad y^2 + 169y - 2\,960 = 0.$$

   Le discriminant du membre de gauche de cette équation est :

   $$\Delta = 169^2 - 4 \times 1 \times (-2\,960) = 40\,401 = 201^2.$$

   Il y a donc deux solutions à l'équation :

   $$y_1 = \frac{-169 - 201}{2} < 0 \text{ donc impossible pour notre problème}$$

   et

   $$y_2 = \frac{-169 + 201}{2} = 16.$$

   Ainsi, $y = 16$ et $x = 20 - 16 = 4$.

   La plus grosse dinde pèse donc 16 livres et la plus petite, 4 livres.

17 Des timbres pour un franc (niveau 3^e^)

La dame tend un franc à l'employé et dit : « Donnez-moi quelques timbres à deux centimes, dix fois autant de timbres à un centime et le reste en timbres à cinq centimes. »

Comment remplir cette commande ?

Solution

Notons x le nombre de timbres à 2 centimes et y le nombre de timbres à 5 centimes. Alors,

$$2x + 10x + 5y = 100 \qquad \text{soit} \qquad 12x + 5y = 100.$$

On teste alors différentes valeurs de x pour trouver la valeur de y correspondant :

x	y
1	$5y = 100 - 12 = 88$ donc pas de valeur entière possible pour y
2	$5y = 100 - 24 = 76$ donc pas de valeur entière possible pour y
3	$5y = 100 - 36$ donc pas de valeur entière possible pour y
4	$5y = 100 - 48 = 52$ donc pas de valeur entière possible pour y
5	$5y = 100 - 60 = 40$ donc $y = 8$.

Il y a donc 5 timbres à 2 centimes, 50 timbres à 1 centime et 8 timbres à 5 centimes.

18 Le poids d'une brique (niveau 4^e^)

Si une brique est équilibrée par les trois quarts d'une brique et trois quarts d'une livre, combien pèse cette brique ?

Solution

Posons x le poids (en livres) d'une brique. Alors,

$$x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \qquad \text{soit} \frac{1}{4}x = \frac{3}{4} \qquad \text{soit} x = 3.$$

Une brique pèse donc 3 livres.

19 Le jeu de massacre (niveau 6e)

Comment marquer 50 points ?

Solution

Nous avons les choix suivants pour marquer des points :

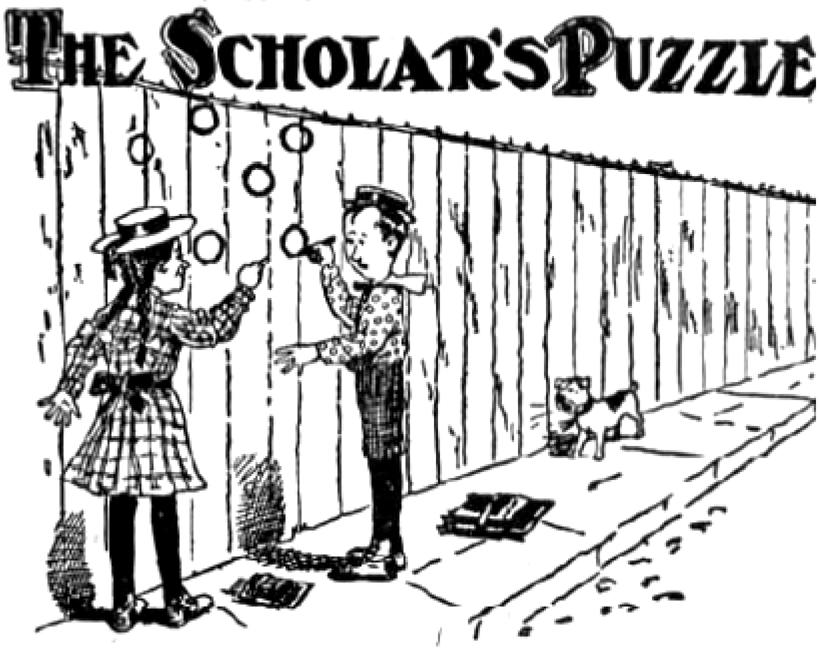
$$3 - 6 - 9 - 12 - 15 - 19 - 21 - 25 - 27 - 30$$

- Si on prend en 1er « 30 », il nous faudrait obtenir 20 points, ce qui est impossible car :
  - $20 = 19 + 1$ mais « 1 » n'est pas présent dans nos choix ;
  - $20 = 15 + 5$ mais « 5 » ne peut pas être obtenu ;
  - $20 = 12 + 8$ mais « 18 » ne peut pas être obtenu ;
  - $20 = 9 + 11$ mais « 11 » ne peut pas être obtenu ;
  - $20 = 6 + 14$ mais « 14 » ne peut pas être obtenu ;
  - $20 = 3 + 17$ mais « 18 » ne peut pas être obtenu.
- Si on prend en 1er « 27 », il nous faudrait obtenir 23 points, ce qui est impossible (en suivant le même raisonnement que précédemment) ;
- Si on prend en 1er « 25 », il nous faudrait obtenir 25 points, ce qui est possible en faisant : $25 = 19 + 6$.

On obtient donc 50 points en visant le 25, le 19 et le 6.

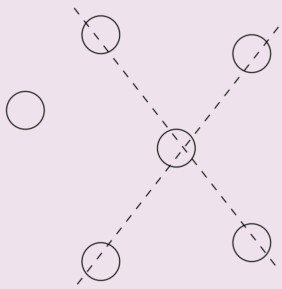
20 Problème d'écoliers

Jennie, la meilleure élève de la classe, expose un intelligent casse-tête à Joe, son camarade de classe. Après avoir dessiné six petits cercles sur la palissage, elle lui dit : « Maintenant tu ne vois que deux rangées de trois cercles. Je veux que tu effaces un des cercles et que tu le redessines quelque part sur la palissade pour qu'il y ait quatre rangées de trois cercles. »



Solution

Voici un schéma des 6 cercles dessinés sur la palissade :



Le cercle non aligné avec les autres doit être placé comme suit :