La longueur d'une bissectrice dans un triangle

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Article

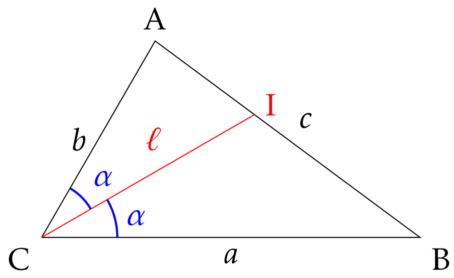
par
Stéphane PASQUET

1er septembre 2018

Énoncé du résultat

Considérons un triangle quelconque ABC; posons alors AB = c, AC = b et BC = a.
Posons ℓ la longueur de la bissectrice issue de C; alors, on a :

$$\ell = \sqrt{ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}$$



Démonstration (niveau : 1re S)

- L'aire du triangle ABC est donnée par la formule :

$$\mathscr{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}ab\sin(2\alpha).$$

- L'aire du triangle ACI est donnée par la formule :

$$\mathscr{A}_{\mathrm{ACI}} = \frac{1}{2}b\ell\sin(\alpha).$$

- L'aire du triangle BCI est donnée par la formule :

$$\mathscr{A}_{\mathrm{BCI}} = \frac{1}{2}a\ell\sin(\alpha).$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}_{\mathrm{ABC}} = \mathscr{A}_{\mathrm{ACI}} + \mathscr{A}_{\mathrm{BCI}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}ab\sin(2\alpha) = \frac{1}{2}b\ell\sin(\alpha) + \frac{1}{2}a\ell\sin(\alpha) \\
\Leftrightarrow\ & ab\sin(2\alpha) = \ell\sin(\alpha)(b+a) \\
\Leftrightarrow\ & \ell = \frac{ab}{a+b} \times \frac{\sin(2\alpha)}{\sin\alpha}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

d'où :

$$\ell = \frac{ab}{a+b} \times \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

et donc :

$$\ell = \frac{ab}{a+b} \times 2\cos\alpha.$$

On en déduit alors que :

$$\ell^2 = \frac{(ab)^2}{(a+b)^2} \times 4\cos^2\alpha.$$

Or,

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2},$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\ell^2 &= \frac{(ab)^2}{(a+b)^2} \times 4 \times \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \\
&= \frac{(ab)^2}{(a+b)^2} \times 2(1+\cos(2\alpha)).
\end{aligned}$$

La relation d'Al-Kashi dans le triangle ABC donne :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(2\alpha).$$

Donc :

$$\cos(2\alpha) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\ell^2 &= \frac{(ab)^2}{(a+b)^2} \times 2\left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \\
&= \frac{(ab)^2}{(a+b)^2} \times 2\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \\
&= \frac{ab}{(a+b)^2}(a^2+2ab+b^2-c^2) \\
&= \frac{ab}{(a+b)^2}\left[(a+b)^2 - c^2\right] \\
&= ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit alors (car $\ell \geqslant 0$) :

$$\ell = \sqrt{ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}.$$