

Le théorème de Pick

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

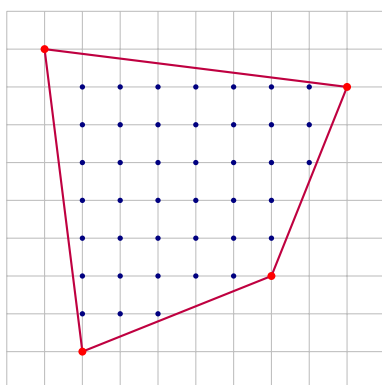
Article

par
Stéphane PASQUET

2 septembre 2018

1 Introduction

On considère un polygone convexe, c'est-à-dire une figure géométrique constituée de plusieurs côtés rectilignes de sorte qu'aucun sommet ne « rentre » dans la figure, sur un maillage régulier de sorte que chaque sommet soit sur un nœud de ce maillage comme l'illustre le schéma ci-dessous.



Le théorème de Pick stipule que la superficie du polygone peut être calculée de façon simple à l'aide de la formule :

$$\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1$$

exprimée en unités d'aire, où « i » représente le nombre de nœuds intérieurs au polygone et « b » celui des nœuds se trouvant sur ses côtés.

Par exemple, sur le 1^{er} schéma ci-contre, $i = 41$ et $b = 4$; d'où :

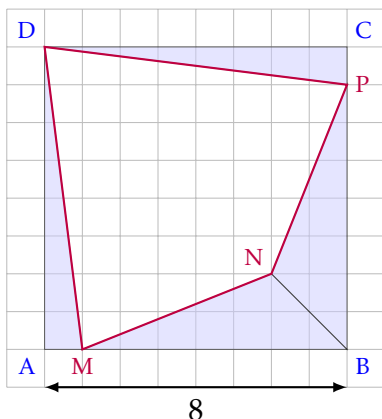
$$\mathcal{A} = 41 + 2 - 1 = 42.$$

On peut aisément calculer \mathcal{A} en calculant d'une part l'aire du carré bleu ABCD (voir ci-contre) et d'autre part, l'aire des triangles AMD, BMN, BNP, et PCD :

- Aire de ABCD : $8^2 = 64$
- Aire de AMD : $\frac{1}{2} \times 1 \times 8 = 4$
- Aire de BMN : $\frac{1}{2} \times 7 \times 2 = 7$
- Aire de BNP : $\frac{1}{2} \times 7 \times 2 = 7$
- Aire de PCD : $\frac{1}{2} \times 1 \times 8 = 4$

Donc l'aire de MDPN est :

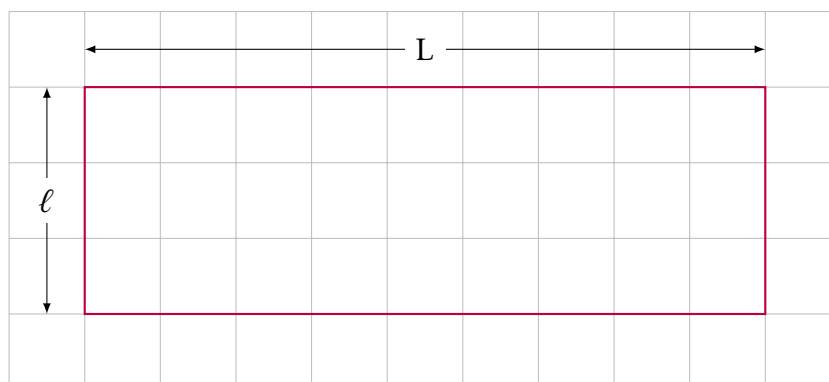
$$\mathcal{A} = 64 - (4 + 7 + 7 + 4) = 64 - 22 = 42.$$



2 Démonstration

2.1 La formule est-elle vraie pour un rectangle quelconque ?

Considérons un rectangle comme ci-dessous :



Ici, $b = 2(L + 1) + 2(\ell - 1) = 2L + 2\ell$ et $i = (\ell - 1)(L - 1) = L\ell - L - \ell + 1$.

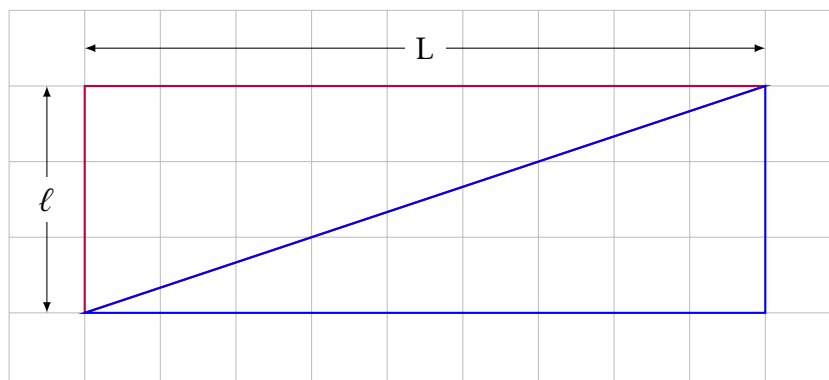
Ainsi,

$$\begin{aligned} i + \frac{b}{2} - 1 &= L\ell - L - \ell + 1 + \frac{2(L + \ell)}{2} - 1 \\ &= L\ell \\ &= \text{aire du rectangle.} \end{aligned}$$

La formule de Pick est donc vraie pour un rectangle quelconque.

2.2 La formule est-elle vraie pour un triangle rectangle ?

Considérons la moitié du rectangle précédent :



Appelons toujours i le nombre de points (nœuds) intérieurs et $b = c + d$ le nombre de points sur le périmètre (c représentant le nombre de points sur les côtés perpendiculaires et d sur l'hypoténuse).

Collons à notre triangle un autre triangle identique (bleu) pour former le rectangle initial. Appelons i' et b' les nombres respectifs de points intérieurs au rectangle et sur le périmètre. On a alors :

$$\begin{cases} i' = 2i + d & \text{deux fois le nombre de points intérieurs au triangle,} \\ & \text{plus ceux sur l'hypoténuse.} \\ b' = 2c - 2 & \text{on enlève deux sommets qui sont en commun.} \end{cases}$$

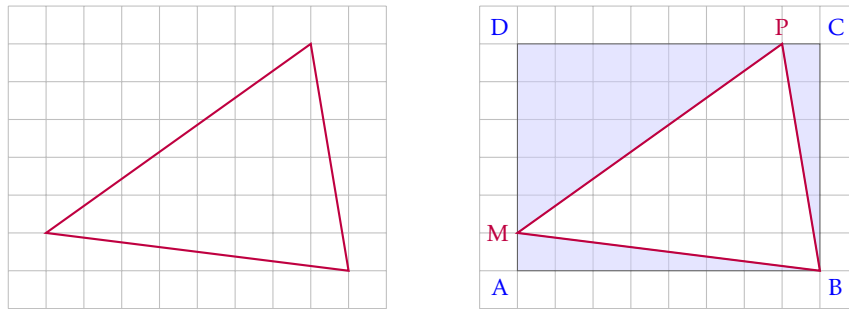
Or, nous savons que l'aire du triangle est égale à la moitié de celle du rectangle, qui est égale (d'après la section précédente) à $i' + \frac{b'}{2} - 1$.
Donc, l'aire du triangle rectangle est :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \left(i' + \frac{b'}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2i + d + \frac{2c-2}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} (2i + d + c - 1 - 1) \\ &= i + \frac{b}{2} - 1 \text{ car } d + c = b.\end{aligned}$$

Le théorème de Pick est donc vrai pour le triangle rectangle.

2.3 La formule est-elle vraie pour un triangle quelconque ?

Considérons maintenant un rectangle quelconque comme celui représenté ci-dessous :



L'aire du triangle BMP est la différence entre celle du rectangle ABCD et de la somme de celle des triangles rectangles AMB (triangle 1), BCP (triangle 2) et PMD (triangle 3).

Appelons :

- i_k le nombre de points à l'intérieur du triangle k et $b_k = c_k + d_k$ le nombre de points sur les bords, avec d_k représentant le nombre de points sur son hypoténuse (extrémités non comprises) et c_k représentant le nombre de points sur ces autres côtés, k étant un entier égal à 1, 2 ou 3 ;
- i le nombre de points à l'intérieur du triangle quelconque et $b = d_1 + d_2 + d_3 + 3$ le nombre de points sur ses bords ;
- i' le nombre de points à l'intérieur du rectangle et b' le nombre de points sur ses bords.

Notons \mathcal{A} l'aire du triangle BMP, \mathcal{A}_k celle du triangle k et \mathcal{A}' celle du rectangle ABCD. Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}' - (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3) \\ &= \left(i' + \frac{b'}{2} - 1 \right) - \left(i_1 + i_2 + i_3 + \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3) - 3 \right) \\ &= i' + \frac{b'}{2} - 1 - \left(i_1 + i_2 + i_3 + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3) - 3 \right).\end{aligned}$$

Or,

$$i' = i + i_1 + i_2 + i_3 + d_1 + d_2 + d_3$$

et

$$b' = c_1 + c_2 + c_3 - 3,$$

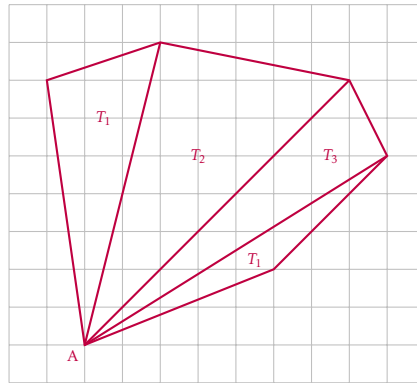
donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= i + i_1 + i_2 + i_3 + d_1 + d_2 + d_3 + \frac{c_1 + c_2 + c_3 - 3}{2} - 1 - i_1 - i_2 - i_3 - \frac{c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3}{2} + 3 \\ &= i + \frac{d_1 + d_2 + d_3 + 3}{2} - 1 \\ &= i + \frac{b}{2} - 1. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que le théorème de Pick était vrai pour un triangle quelconque.

2.4 Et maintenant, le polygone convexe !

Un polygone convexe P à n côtés est formé de $n - 2$ triangles, $n \geq 4$. Notons T_k les $n - 2$ triangles qui constituent le polygone. Je vais ici prendre un hexagone pour avoir un appui visuel :



Je conviens alors de découper P à partir d'un même point A et en nommant les triangles de gauche à droite T_1, T_2, \dots, T_{n-2} .

Je note alors :

- c_1 le nombre de points sur les deux côtés de T_1 qui coïncident avec deux côtés de P ;
- c_{n-2} le nombre de points sur les deux côtés de T_{n-2} qui coïncident avec deux côtés de P ;
- $c_k, 1 \leq k \leq n - 3$, le nombre de points sur le seul côté de T_k qui coïncide avec un côté de P ;
- $d_k, 1 \leq k \leq n - 3$, le nombre de points sur le côté de T_k intérieur à P qui ne coïncide pas avec un côté de T_{k-1} ;
- i_k le nombre de points intérieurs à T_k ;
- i le nombre de points intérieurs à P ;
- b le nombre de points sur les bords de P .

On a alors :

$$i = \sum_{k=1}^{n-2} i_k + \sum_{k=1}^{n-3} d_k$$

et

$$b = c_1 + (c_2 - 1) + (c_3 - 1) + \dots + (c_{n-3} - 1) + (c_{n-2} - 2),$$

soit :

$$b = \sum_{k=1}^{n-2} c_k - (n-2),$$

ou encore :

$$b = \sum_{k=1}^{n-2} c_k - n + 2.$$

En notant \mathcal{A} l'aire de P et \mathcal{A}_k celle de T_k , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{k=1}^{n-2} \mathcal{A}_k \\ &= \mathcal{A}_1 + \sum_{k=2}^{n-3} \mathcal{A}_k + \mathcal{A}_{n-2} \\ &= i_1 + \frac{b_1}{2} - 1 + \sum_{k=2}^{n-3} \mathcal{A}_k + i_{n-2} + \frac{b_{n-2}}{2} - 1 \\ &= i_1 + i_{n-2} + \frac{b_1 + b_{n-2}}{2} - 2 + \sum_{k=2}^{n-3} \left(i_k + \frac{b_k}{2} - 1 \right) \\ &= i_1 + i_{n-2} + \frac{b_1 + b_{n-2}}{2} - 2 + \sum_{k=2}^{n-3} \left(i_k + \frac{d_{k-1} + c_k + d_k + 1}{2} - 1 \right) \\ &= i_1 + i_{n-2} + \frac{b_1 + b_{n-2}}{2} - 2 + \sum_{k=2}^{n-3} i_k + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-3} c_k + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-3} (d_{k-1} + d_k) - \frac{1}{2}(n-4) \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} i_k + \frac{c_1 + d_1 + c_{n-2} + d_{n-3}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-3} c_k + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-3} (d_{k-1} + d_k) - \frac{1}{2}n \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} i_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} c_k + \sum_{k=1}^{n-2} d_k - \frac{1}{2}n \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-2} i_k + \sum_{k=1}^{n-3} d_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} c_k - \frac{1}{2}n \\ &= i + \frac{b + n - 2}{2} - \frac{1}{2}n \\ &= i + \frac{b}{2} - 1. \end{aligned}$$

Le théorème de Pick est donc démontré pour tout polygone convexe.