Le théorème de Viviani

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

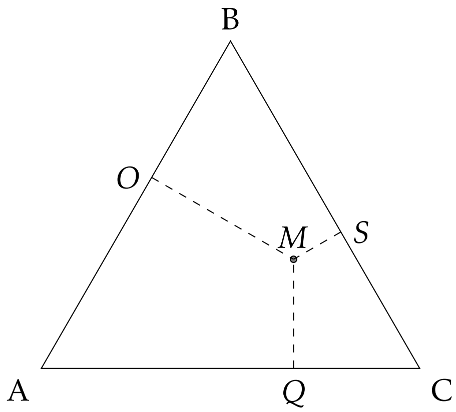
Article

par
Stéphane PASQUET

2 septembre 2018

Énoncé

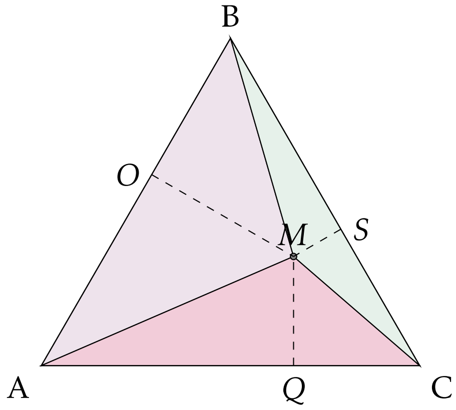
Dans un triangle équilatéral, la somme des distances d'un point intérieur quelconque aux trois côtés est constante.



Autrement dit, quelle que soit la position du point M dans le triangle ABC,

$$\mathrm{MS} + \mathrm{MQ} + \mathrm{MO} = \text{constante}$$

Démonstration avec les aires



Posons A_1 l'aire du triangle ABM ; alors,

$$A_1 = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{MO}.$$

Posons A_2 l'aire du triangle ACM ; alors,

$$A_2 = \frac{1}{2}\mathrm{AC} \times \mathrm{MQ}.$$

Posons A_3 l'aire du triangle CBM ; alors,

$$A_3 = \frac{1}{2}\mathrm{BC} \times \mathrm{MS}.$$

Posons A_0 l'aire du triangle ABC ; alors,

$$A_0 = \frac{1}{2}\mathrm{AC} \times h$$

où h est la hauteur de ABC issue de B. À l'aide du théorème de Pythagore, on peut démontrer que :

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AC}.$$

On en déduit que :

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{AC}^2.$$

Or,

$$A_0 = A_1 + A_2 + A_3$$

et

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC}.$$

Donc :

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{AC}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\,(\mathrm{MO} + \mathrm{MS} + \mathrm{MQ})$$

soit :

$$\boxed{\mathrm{MO} + \mathrm{MS} + \mathrm{MQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AC}}.$$

On voit alors que la somme des 3 distances ne dépend pas de la position de M.

Démonstration avec l'analyse

On rapporte le plan au repère $\left(A\,;\overrightarrow{AC},\vec{j}\right)$, où $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{j}=0$ et $\|\overrightarrow{AC}\|=\|\vec{j}\|$. Alors,

$$A(0\,;0)\quad;\quad C(1\,;0)\quad;\quad B\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$

d'où :

$$(AB)\ :\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=0,$$

ou encore :

$$(AB)\ :\ \sqrt{3}x-y=0.$$

De plus, on a :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$

d'où :

$$(BC)\ :\ -\sqrt{3}x-y+y_0=0.$$

$$C\in(BC)\Rightarrow y_0=\sqrt{3},$$

donc :

$$(BC)\ :\ -\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$$

Posons alors $M(\alpha\,;\beta)$ dans ce repère. On sait que la distance du point M à une droite (d) d'équation $ax+by+c=0$ est :

$$d(M;(d))=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

D'où :

$$d(M;(AB))=\frac{|\alpha\sqrt{3}-\beta|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}}=\frac{|\alpha\sqrt{3}-\beta|}{2}$$

et

$$d(M;(BC))=\frac{|-\alpha\sqrt{3}-\beta+\sqrt{3}|}{\sqrt{(-\sqrt{3}^2+(-1)^2}}=\frac{|-\alpha\sqrt{3}-\beta+\sqrt{3}|}{2}.$$

De plus,

$$d(M;(AC))=\beta.$$

De plus, M est toujours au-dessous de (AB), d'équation réduite :

$$y=x\sqrt{3}.$$

Donc :

$$\beta\leqslant\alpha\sqrt{3},$$

ce qui signifie que :

$$\alpha\sqrt{3}-\beta\geqslant 0,$$

et donc :

$$\mathrm{d}(\mathrm{M};(\mathrm{AB})) = \frac{\alpha\sqrt{3}-\beta}{2}.$$

De même, M est toujours au-dessous de (BC), d'équation réduite :

$$y = -x\sqrt{3} + \sqrt{3},$$

d'où :

$$\beta \leqslant -\alpha\sqrt{3} + \sqrt{3},$$

ce qui signifie que :

$$-\alpha\sqrt{3} - \beta + \sqrt{3} \geqslant 0$$

et donc :

$$\mathrm{d}(\mathrm{M};(\mathrm{BC})) = \frac{-\alpha\sqrt{3}-\beta+\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{d}(\mathrm{M};(\mathrm{BC})) + \mathrm{d}(\mathrm{M};(\mathrm{AC})) + \mathrm{d}(\mathrm{M};(\mathrm{AB})) = \frac{\alpha\sqrt{3}-\beta-\alpha\sqrt{3}-\beta+\sqrt{3}}{2} + \beta,$$

soit :

$$\boxed{\mathrm{d}(\mathrm{M};(\mathrm{BC})) + \mathrm{d}(\mathrm{M};(\mathrm{AC})) + \mathrm{d}(\mathrm{M};(\mathrm{AB})) = \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

La somme des 3 distances ne dépend donc pas de la position du point M.