0 exposant 0

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Article

par
Stéphane PASQUET

6 septembre 2018

Introduction

Au même titre que « $\frac{0}{0}$ », l'écriture « 0^0 » reste un mystère pour beaucoup de personnes novices qui manipulent les mathématiques. Comme pour la première écriture, nous allons voir qu'il est impossible d'imposer une égalité fixe pour la seconde.

Première approche

Au collège, nous voyons que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}$$

où x représente un nombre.
On voit aussi la relation :

$$x^n \times x^m = x^{n+m}. \tag{1}$$

Nous voyons aussi la relation :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \neq 0.$$

Donc, si on prend $m = -n$, la relation (1) devient :

$$x^n \times x^{-n} = x^0. \tag{2}$$

Or,

$$x^n \times x^{-n} = \frac{x^n}{x^n} = 1, \quad x \neq 0. \tag{3}$$

On déduit alors des égalités (2) et (3) :

$$\boxed{x^0 = 1, \quad x \neq 0}.$$

Une approche fonctionnelle

Considérons la fonction $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$.
Nous savons que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e^0 = 1$. On aurait alors montré que :

$$\boxed{0^0 = 1}$$

À ce stade, on est soulagé : « Ouf ! On a trouvé la valeur de 0^0 ! ». Mais comme je suis un rabat-joie, j'aimerais parler d'une autre fonction :

$$g(x) = x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x} \times \ln x} = e.$$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\ln x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0^0$. Mais $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = e$ d'après l'expression trouvée précédemment. D'où :

$$\boxed{0^0 = e}$$

On pourrait même considérer la fonction :

$$h(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^x$$

En effet, on a d'une part : $h(x) = e^{-1}$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = 0^0 = e^{-1}$.

$$\boxed{0^0 = e^{-1}}.$$

Une approche ensembliste

En théorie des ensembles, on voit que si deux ensembles M et N ont respectivement un cardinal égal à n et m, alors le nombre d'applications de N vers M est égal à m^n.
Ainsi, 0^0 représente, dans ce contexte précis, le nombre d'applications de l'ensemble vide vers l'ensemble vide, c'est-à-dire que :

$$\boxed{0^0 = 1}$$

Conclusion

Nous pouvons, à la vue de ce qui a été écrit précédemment, conclure que l'écriture « 0^0 » n'a aucune signification si elle est sortie d'un certain contexte, et selon le contexte dans lequel on la place, elle n'a pas la même signification. Ce n'est qu'une écriture qui symbolise un phénomène mathématique particulier selon le contexte dans lequel on la place. Ainsi, parler de 0^0 seul n'a pas de sens.

Document fortement inspiré de l'article de Jean Jacquelin,
« 0 puissance 0 », paru dans le magazine Quadrature n°66.