

Corrigé rapide du bac 2019 Amérique du Nord, série S

Stéphane Pasquet – <https://www.mathweb.fr>

30 mai 2019

Exercice 1

Partie A

1. (a) Ici, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 5 ; 0, 07^2)$.

On souhaite connaître $P(1, 35 \leq X \leq 1, 65)$. À la calculatrice, on trouve :

$$\underline{P(1, 35 \leq X \leq 1, 65) \approx 0, 968.}$$

- (b) Ici, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 5 ; \sigma_1^2)$.

On souhaite que $P(1, 35 \leq X_1 \leq 1, 65) = 0, 98$.

$$P(1, 35 \leq X_1 \leq 1, 65) = 0, 98 \iff P\left(\frac{1, 35 - 1, 5}{\sigma_1} \leq \frac{X_1 - 1, 5}{\sigma_1} \leq \frac{1, 65 - 1, 5}{\sigma_1}\right) = 0, 98$$

$$\iff P\left(-\frac{0, 15}{\sigma_1} \leq Z \leq \frac{0, 15}{\sigma_1}\right) = 0, 98$$

$$\iff 1 - 2P\left(Z \geq \frac{0, 15}{\sigma_1}\right) = 0, 98$$

car Z suit la loi normale centrée réduite

$$\iff P\left(Z \leq -\frac{0, 15}{\sigma_1}\right) = \frac{1 - 0, 98}{2} = 0, 01$$

La calculatrice nous donne (à l'aide de la fonction « InvN » sur CASIO) :

$$-\frac{0, 15}{\sigma_1} \approx -2, 326$$

soit :

$$\underline{\sigma_1 \approx 0, 064.}$$

2. (a) Un intervalle de fluctuation asymptotique à 95% est donné par la formule :

$$\left[p - 1, 96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1, 96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Ici, $n = 250$ et $p = 0, 02$ donc ces dernières conditions sont remplies. Un intervalle de fluctuation est alors :

$$I = [0, 002645420201 ; 0, 037354579799]$$

soit, arrondi à 10^{-3} :

$$\underline{I = [0, 003 ; 0, 037].}$$

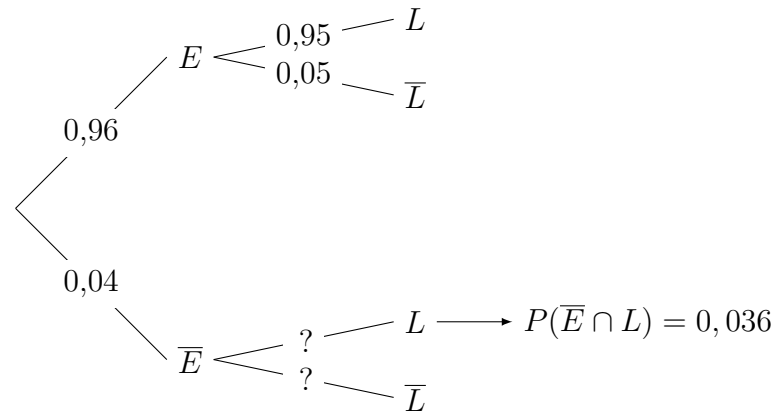
(b) La fréquence de tubes non conformes sur cet échantillon de 250 est :

$$f = \frac{10}{250} = 0,04 \notin I$$

donc nous pouvons décider de réviser la machine.

Partie B

1. L'arbre semi-complété est le suivant :

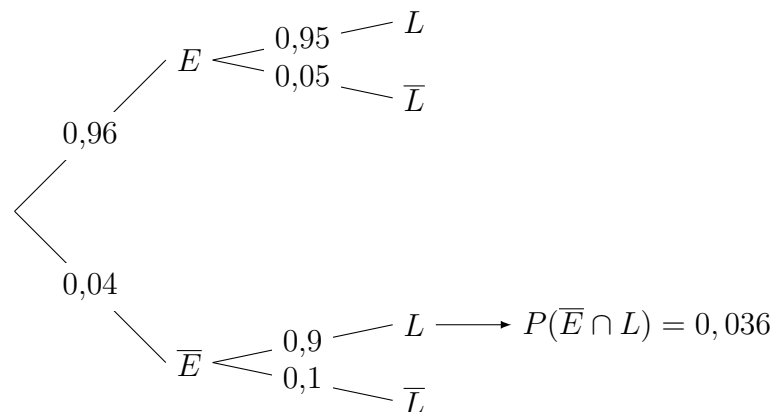


$$P(\overline{E} \cap L) = P_{\overline{E}}(L) \times P(E)$$

donc :

$$P_{\overline{E}}(L) = \frac{P(\overline{E} \cap L)}{P(E)} = \frac{0,036}{0,04} = 0,9.$$

On en déduit alors l'arbre complété :



2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(L) &= P(E \cap L) + P(\overline{E} \cap L) \\ &= 0,96 \times 0,95 + 0,036 \\ &= 0,948. \end{aligned}$$

Exercice 2

Affirmation 1

$$\begin{aligned} z - 1 = 1(z + 1) &\iff z - 1 = 1z + 1 \\ &\iff z - 1z = 21 \\ &\iff (1 - 1)z = 21 \\ &\iff z = \frac{21}{1 - 1} \\ &\iff z = \frac{21(1 + 1)}{(1 - 1)(1 + 1)} \\ &\iff z = \frac{21 - 2}{2} \\ &\iff z = -1 + 1. \end{aligned}$$

$$| -1 + 1 | = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ donc :}$$

$$-1 + 1 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}1 \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}1 \right) = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

L'affirmation 1 est donc fausse.

Affirmation 2

$$\begin{aligned} 2 \cos(x)e^{-1x} &= 2 \cos(x) \left[\cos(-x) + 1 \sin(-x) \right] \\ &= 2 \cos(x) \left[\cos(x) - 1 \sin(x) \right] \\ &= 2 \cos^2(x) - 2 \cos(x) \sin(x)1 \\ &= \cos(2x) + 1 - \sin(2x)1 \\ &= 1 + \cos(-2x) + 1 \sin(-2x) \\ &= 1 + e^{-2ix}. \end{aligned}$$

L'affirmation 2 est donc fausse.

Affirmation 3

$$\begin{aligned} |z - 1| = |z + 1| &\iff |z - 1| = |z - (-1)| \\ &\iff MA = MB \text{ avec } A(1) \text{ et } B(-1) \\ &\iff M \text{ est sur la médiatrice de } [AB] \\ &\text{qui a pour équation } y = -x. \end{aligned}$$

L'affirmation 3 est donc vraie.

Affirmation 4

$$z^5 + z - 1 + 1 = 0 \iff z^5 + z + 1 = 1.$$

Si $z \in \mathbb{R}$ alors $z^5 + z + 1 \in \mathbb{R}$ et donc $z^5 + z + 1 \neq 1$.

L'équation $z^5 + z - 1 + 1 = 0$ ne peut donc pas admettre de solutions réelles.

L'affirmation 4 est donc fausse.

Exercice 3

Partie A

1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ donc f est croissante sur cet intervalle.
2. $f(0) = 0 - \ln(0+1) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$. Ainsi,

$$x - \ln(x+1) \geq 0$$

soit :

$$\underline{x \geq \ln(x+1)}.$$

Partie B

1. $u_1 = f(u_0) = 1 - \ln(1+1) = 1 - \ln 2$.
 $u_2 = f(u_1) = (1 - \ln 2) - \ln(1 - \ln 2 + 1) \approx \underline{0,039}$.
2. (a) **Initialisation** : $u_0 = 1 \geq 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier n fixé, $u_n \geq 0$.

$u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$ d'après la partie A.

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, pour tout entier n , $u_n \geq 0$.

- (b) $u_{n+1} - u_n = -\ln(1+u_n)$ et $u_n \geq 0$ d'après la question 1 donc $\ln(1+u_n) \geq 0$.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

De plus, $u_0 = 1$ donc $u_n \leq 1$.

- (c) Toute suite décroissante et minorée converge. Or, $u_n \geq 0$ donc (u_n) est minorée. Elle converge donc.

3. $x = f(x) \iff x = x - \ln(1+x)$
 $\iff 0 = -\ln(x+1)$
 $\iff \ln(x+1) = 0$
 $\iff x+1 = 1$
 $\iff x = 0$

Ainsi $\ell = 0$ car ℓ est solution de l'équation $x = f(x)$.

4. (a) Un algorithme possible est le suivant :

```

p est un entier
N est un entier
u ← 1 (1er terme de la suite)
N ← 0 (indice du premier terme)

Tant que u ≥ 10-p:
    u ← u - ln(u+1)
    N ← N+1

Fin du Tant que

Afficher N

```

- (b) Sur une calculatrice TI ou CASIO classique, il est plutôt rare de voir apparaître plus de 14 chiffres après la virgule... surtout dans le tableur !

Théoriquement, on peut constater que $u_5 \approx 3,9 \times 10^{-14}$ et $u_6 \approx 7,8 \times 10^{-17}$, ce qui nous permet de dire que le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-15}$ est $n = 6$. Mais les utilisateurs de ces calculatrices ont pu s'apercevoir que les valeurs affichées étaient loin d'être correctes à partir de $n = 6$... Cette question était donc plutôt difficile à faire avec les instruments classiques.

Pour info, je vais parler de cela dans mon article :

<https://www.mathweb.fr/euclide/2019/05/30/bac-s-2019-amerique-du-nord-serie-s-un-corrige/>

Exercice 4

1. Le plan (LMK) est parallèle au plan (ABC) par construction.
De plus, (IN) est orthogonale à (ABC) , donc orthogonale à (LMK) .
 (IN) est donc orthogonale à toute droite de (LMK) , donc à (LM) .
2. (a) $\overrightarrow{NC} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 $\overrightarrow{ML} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (b) $\overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (-1) \times 0 = 0$.
Ainsi, $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$ sont orthogonaux.
- (c) D'après la question précédente, $\overrightarrow{ML}$ est un vecteur normal au plan (NCI) .
Soit $Z(x; y; z) \in (NCI)$; alors :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CZ} \cdot 2\overrightarrow{ML} = 0 &\iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
 &\iff -(x-1) + (y-1) = 0 \\
 &\iff \underline{-x + y = 0}
 \end{aligned}$$

3. (a) On s'assure que les coordonnées de N , J et M vérifient l'équation $x - y + z = 1$, ce qui prouve bien que cette équation est celle du plan (NJM) .

$$x_N - y_N + z_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1, \text{ idem pour les deux autres points.}$$

- (b) Un vecteur normal au plan (NJM) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DF}$ d'après l'équation cartésienne du plan.

Donc (DF) est perpendiculaire au plan (NJM) .

- (c) L'intersection des plans (NJM) et (NCI) est obtenue en résolvant le système :

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} -(x - y) = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

On trouve alors :

$$\begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}$$

En posant $x = t$, on trouve la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

qui caractérise la droite passant par le point de coordonnées $(0; 0; 1)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. C'est donc la droite (EG) .

Exercice 4 (Spé)

1. (a) « T » correspond à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 3 \\ 3 \times 4 + 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{« U »} \pmod{5}.$$

« E » correspond à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{« O »} \pmod{5}.$$

Ainsi, le message « TE » devient « UO ».

- (b) $PM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 16 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \pmod{5}.$

- (c) Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors,

$$AZ = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Notons $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Alors,

$$A'Z' = \begin{pmatrix} a'x' + b'y' \\ c'x' + d'y' \end{pmatrix}.$$

Or, A et A' sont congrues modulo 5 donc $a' \equiv a \pmod{5}$, etc.

De plus, $x' \equiv x \pmod{5}$ et $y' \equiv y \pmod{5}$.

Donc $a'x' \equiv ax \pmod{5}$ et $b'y' \equiv by \pmod{5}$, et donc $a'x' + b'y' \equiv ax + by \pmod{5}$.

De même, $c'x' + d'y' \equiv cx + dy \pmod{5}$.

On en déduit que $AZ \equiv A'Z' \pmod{5}$.

(d) $MX \equiv Y \pmod{5} \Rightarrow PMX \equiv PY \pmod{5}$

$\Rightarrow IX \equiv PY \pmod{5}$ car $PM \equiv I \pmod{5}$ d'après la question (b)

$\Rightarrow X \equiv PY \pmod{5}$.

(e) $\ll D \gg \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \ll O \gg$

2. (a) $RS = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(b) Supposons qu'il existe une matrice T telle que $TR \equiv I \pmod{5}$.

Alors, en multipliant à droite chaque membre de la congruence, on a :

$TRS \equiv IS \pmod{5}$, soit $TRS \equiv S \pmod{5}$.

(c) D'après la question (a), $RS \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod{5}$ donc, d'après la question (b) :

$$TR \equiv I \pmod{5} \Rightarrow TRS \equiv S \pmod{5} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv S \pmod{5}$$

ce qui est faux !

Par conséquent (raisonnement par l'absurde), un message codé par la matrice R ne peut être décodé.