Sujet inédit – Bac Math 2019 Terminale S

Stéphane Pasquet – https://www.mathweb.fr

Exercice 1

Dans cet exercice, tous les résultats portant sur les probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Une association de consommateurs mène une enquête sur la durée de vie d'un aspirateur. Elle note x la probabilité qu'un aspirateur de cette marque fonctionne plus de trois ans.
On pose T la durée de vie d'un tel aspirateur, exprimée en années. On admet que T suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est encore inconnue.
On note $f(x)$ la probabilité pour qu'un de ces aspirateurs tombe en panne avant cinq ans sachant qu'il a fonctionné correctement au moins trois ans, pour $x \in]0\,;1]$.

Partie A

1. Montrer que $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln(x)}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
3. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.
4. Résoudre sur $]0\,;1]$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0,2$.
   Interprétez ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on prend $x = 0,716$.

1. Montrer que $\lambda \approx 0,111$.
2. Calculer la durée de vie moyenne (arrondie à l'unité) d'un tel aspirateur.
3. Ces aspirateurs sont garantis trois ans.
   Un revendeur propose à ses clients une extension de garantie de deux ans sur ces aspirateurs.
   Un client estime qu'il est préférable de la prendre si la probabilité que l'aspirateur tombe en panne au cours des deux années qui suivent la garantie initiale est au moins égale à 0,25.
   Doit-il prendre cette extension de garantie ?

Partie C

L'association de consommateurs prélève un échantillon de 500 aspirateurs dans divers points de vente.
On note D la variable aléatoire représentant la durée de vie d'un aspirateur, exprimée en mois. On admet ici que D suit la loi normale de moyenne 108 et d'écart-type σ.

1. Déterminer la valeur de σ, arrondie à l'unité, telle que $P(D \geqslant 36) = 0,716$.

On prendra par la suite $\sigma = 126$.

2. Calculer $P(D \geqslant 60)$.
   Interpréter ce dernier résultat dans le contexte de l'exercice.
3. L'association constate que 305 aspirateurs ne sont pas tombés en panne avant la cinquième année après leur achat.
   On admet que la probabilité qu'un aspirateur ait une durée de vie supérieure ou égale à cinq ans est égale à 0,648.
   (a) Calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % des fréquences d'aspirateurs ayant fonctionné au moins cinq années.
   (b) Calculer la fréquence des aspirateurs ayant fonctionné au moins cinq années sur l'échantillon pris par l'association.
   Que peut-on alors en conclure ?

Corrigé

Partie A

1. $P(T \geqslant 3) = x$ et $f(x) = \mathrm{P}_{(\mathrm{T} \geqslant 3)}\left((\mathrm{T} \leqslant 5)\right)$ donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{P\Big((T \geqslant 3) \cap (T \leqslant 5)\Big)}{P(T \geqslant 3)} \\
&= \frac{P\Big(3 \leqslant T \leqslant 5\Big)}{P(T \geqslant 3)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-3\lambda} - \mathrm{e}^{-5\lambda}}{\mathrm{e}^{-3\lambda}} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}.
\end{aligned}$$

   Or, $\mathrm{e}^{-3\lambda} = x$, donc $-3\lambda = \ln x$, soit $\lambda = -\dfrac{\ln x}{3}$. Donc :

$$\boxed{= 1 - \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln x}}$$

2. On a :

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

   et

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0.$$

   Donc :

$$\boxed{\lim_{x \to x} f(x) = 1}$$

3. $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln x}$ est de la forme e^{u},

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = -\frac{2}{3x}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln x}.$$

   Donc $f'(x) < 0$ sur $]0\,;+\infty[$, ce qui signifie que f est strictement décroissante sur cet intervalle, donc à plus fortes raisons sur $]0\,;1]$.

4. $$\begin{aligned} f(x) \leqslant 0,2 &\iff 1 - \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln x} \leqslant 0,2 \\ &\iff 1 - 0,2 \leqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln x} \\ &\iff 0,8 \leqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln x} \\ &\iff \ln 0,8 \leqslant \frac{2}{3}\ln x \\ &\iff \frac{3}{2} \times \ln 0,8 \leqslant \ln x \\ &\iff \mathrm{e}^{\frac{3\ln 0,8}{2}} \leqslant x \end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$, est :

   $$\boxed{S = \left[\mathrm{e}^{\frac{3\ln 0,8}{2}}\,;1\right]}$$

   Ce dernier résultat signifie que la probabilité pour qu'un aspirateur tombe en panne avant cinq ans sachant qu'il a fonctionné correctement au moins trois ans est inférieure à 0,2 uniquement si la probabilité qu'il ait fonctionné plus de 3 ans est au moins égale à 0,716.

Partie B

1. On a vu dans la partie précédente que $\lambda = -\dfrac{\ln x}{3} = -\dfrac{\ln 0,716}{3} \approx 0,111$.
2. La durée de vie moyenne est $\dfrac{1}{\lambda} \approx 9$ années.
3. On cherche ici à déterminer $\mathrm{P}_{(\mathrm{T}\geqslant 3)}\left((\mathrm{T} \leqslant 5)\right)$, c'est-à-dire $f(x)$.
   $f(x) = f(0,716) = 1 - \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\ln 0,716} \approx 0,199658 < 0,25$.
   Le client ne dont donc pas prendre l'extension de garantie selon ses critères.

Partie C

1. $$\begin{aligned} P(D \geqslant 36) = 0,716 &\iff P\left(\frac{D-108}{\sigma} \geqslant \frac{36-108}{\sigma}\right) = 0,716 \\ &\iff P\left(Z \geqslant -\frac{72}{\sigma}\right) = 0,716 \end{aligned}$$

   où $Z = \dfrac{T-108}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

   $$\iff P\left(Z \leqslant -\frac{72}{\sigma}\right) = 1 - 0,716 = 0,284$$

À la calculatrice, on trouve :

$$\frac{72}{\sigma} \approx 0,571 \iff \sigma \approx 126.$$

2. $P(D \geqslant 60) \approx 0,648$. Cela signifie que la probabilité pour que l'aspirateur dure plus de 60 mois (i.e. 5 ans) est à peu près égale à 0,648.
3. (a) $n = 500 \geqslant 30$, $np = 500 \times 0,648 = 324 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 176 \geqslant 5$. On peut donc utiliser la formule du cours pour déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I = \left[0,648 - 1,96\sqrt{\frac{0,648(1-0,648)}{500}}\,;0,648 + 1,96\sqrt{\frac{0,648(1-0,648)}{500}}\right]$$

soit $I \approx [0,606\,;0,689]$.

(b) La fréquence est $\frac{305}{500} = 0,61 \in I$. On peut ainsi conclure que l'échantillon pris par l'association est conforme à l'hypothèse selon laquelle la probabilité qu'un aspirateur ait une durée de vie supérieure ou égale à cinq ans est égale à 0,648.