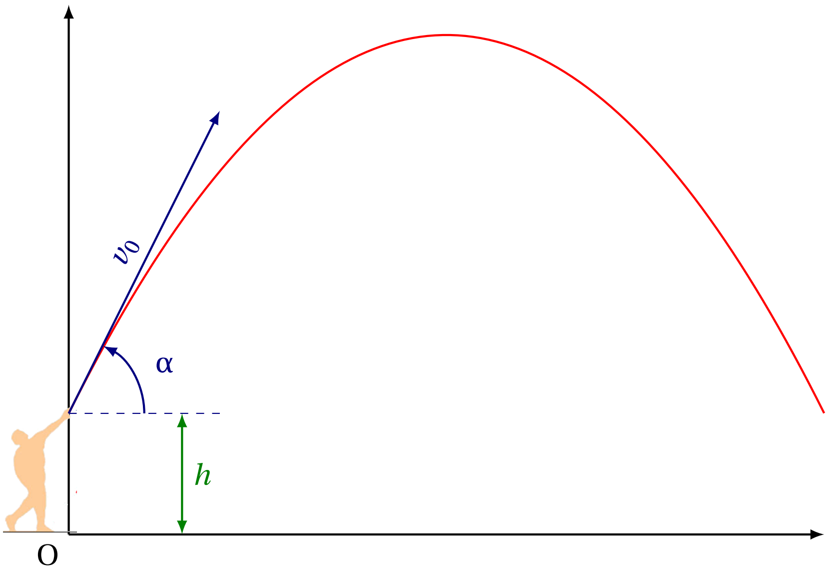
CHAPITRE 1 Le second degré

Plan de ce chapitre

I. Introduction et motivation

I. 1. Trajectoire d'un objet lancé avec un angle

Imaginons l'expérience suivante : on lance un objet quelconque à partir d'une hauteur h par rapport au sol, avec un angle α par rapport à l'horizontale, et ce avec une vitesse initiale v_0. Le tout est rapporté à un repère, comme représenté ci-dessous :



Les loi de la mécanique newtonienne nous permette de dire que l'équation de la trajectoire (en rouge) est :

$$y = -\frac{1}{2} \times g \times \frac{1}{v_0^2 \cos\alpha} x^2 + (\tan\alpha) x + h,$$

où $g \approx 9,81$ sur Terre.

Si on souhaite connaître :

- le point culminant de la trajectoire,
- l'endroit où va tomber l'objet,

ou avoir d'autres informations sur cette trajectoire, il serait intéressant de savoir étudier les fonctions de la même forme, c'est-à-dire de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

C'est ce que nous allons faire dans ce chapitre.

I. 2. Définition

Définition 1

On appelle **polynôme du second degré**, ou **polynôme de degré 2**, les polynômes de la forme :

$$\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c \qquad , \qquad a \neq 0,$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

Exemples 1

1. $P_1(x) = 3x^2 - 5x + 2$ est un polynôme de degré 2 avec $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$.
2. $P_2(x) = -8x^2 + 4x - 7$ est un polynôme de degré 2 avec $a = -8$, $b = 4$ et $c = -7$.

II. Forme canonique

II. 1. Définition

Définition 2

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2.
On appelle **forme canonique** de P la forme suivante :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

où $\alpha = \dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Exemple 2

Considérons le polynôme $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$.
Alors,

$$\alpha = -\frac{-5}{2 \times 6} = \frac{5}{12}$$

et donc :

$$\beta = P\left(\frac{5}{12}\right) = 3\left(\frac{5}{12}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{12}\right) + 2 = \frac{7}{16}.$$

Ainsi, la forme canonique de $P(x)$ est :

$$P(x) = 3\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 + \frac{7}{16}.$$

II. 2. Sens de variation

Propriété 1

Soit $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ la forme canonique d'un polynôme de degré 2.

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

III. Racines éventuelles

III. 1. Définition

Déf. 3

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$.

On appelle **racines** de $P(x)$ les nombres x_i tels que $P(x_i) = 0$, c'est-à-dire les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Exemples 3

1. $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$. $x = 1$ est une racine de $P(x)$ car $P(1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 2 = 0$.
2. $Q(x) = x^2 + x - 6$. $x = -3$ est une racine de $Q(x)$ car $Q(-3) = (-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$.

III. 2. Existence de racines

III. 2. a. Résultat préliminaire

Propriété 2

Pour tous réels x et a,

$$x^2 + mx = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}.$$

Démonstration

Développons à l'aide de l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} &= x^2 + \cancel{2} \times \frac{m}{\cancel{2}} \times x + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}\\ &= x^2 + mx + \cancel{\frac{m^2}{4}} - \cancel{\frac{m^2}{4}}\\ &= x^2 + mx.\end{aligned}$$

L'égalité est ainsi démontrée.

III. 2. b. Discriminant

Considérons un polynôme $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x) &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] && \text{d'après la propriété 2} \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] && \text{en mettant au même dénominateur les deux dernières fractions}
\end{aligned}$$

Cette dernière écriture nous pousse à considérer la définition suivante.

Déf. 4

Soit $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$.

On appelle **discriminant** de $\mathrm{P}(x)$ le nombre Δ (lire « delta ») défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemple 4

On considère le polynôme $\mathrm{P}(x) = 3x^2 - 5x + 2$.
Son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1.$$

III. 2. c. Trouver les racines éventuelles

Nous cherchons à résoudre l'équation :

$$\mathrm{P}(x) = 0$$

c'est-à-dire :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

d'après l'écriture trouvée précédemment. Comme $a \neq 0$, cette équation est équivalente à :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \qquad \text{(E)}$$

On voit alors que trois cas sont possibles :

- **Cas où $\Delta < 0$.** L'équation (E) n'a pas de solution car un carré n'est jamais strictement négatif.
- **Cas où $\Delta = 0$.** L'équation (E) est alors équivalente à :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

  soit :

$$x+\frac{b}{2a} = 0$$

  car $x^2 = 0 \iff x = 0$.

  Ainsi,

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- **Cas où $\Delta > 0$.** L'équation (E) est alors équivalente à :

$$x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{ou} \qquad x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  car $x^2 = a \iff x = -a$ ou $x = a$.

  Ainsi,

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{ou} \qquad x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

De cette étude, on en déduit la propriété suivante :

Propriété 3

Soit $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$, de discriminant Δ.

- Si $\Delta < 0$, $\mathrm{P}(x)$ n'a pas de racine.
- Si $\Delta = 0$, $\mathrm{P}(x)$ a une racine (dite « double ») :

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta > 0$, $\mathrm{P}(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Remarque. Dans le cas où $\Delta > 0$, on dit que x_1 est l'**expression conjuguée** de x_2, et réciproquement.

Exemples 5

1. $P_1(x) = x^2 + x + 1$. Son discriminant est :

$$\Delta_1 = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0.$$

   Donc $P(x)$ n'a pas de racine.

2. $P_2(x) = 4x^2 + 4x + 1$. Son discriminant est :

$$\Delta_2 = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0.$$

   Donc $P(x)$ a une racine :
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 4} = -\frac{1}{2}.$$

3. $P_3(x) = 2x^2 - 5x - 3$. Son discriminant est :

$$\Delta_3 = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$$

   Donc $P(x)$ a deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 2} \\ &= \frac{-2}{4} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 2} \\ &= \frac{12}{4} \\ &= 3. \end{aligned}$$

IV. Factorisation et signe d'un polynôme de degré 2

IV. 1. Factorisation

Propriété 4

Soit $P(x) = ax^2 + bx + x$ un polynôme de degré 2, de discriminant Δ.

- Si $\Delta < 0$ alors $P(x)$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = a\left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2$.
- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines de $P(x)$.

Exemples 6

1. $P_1(x) = x^2 + x + 1$. Son discriminant est :
$$\Delta_1 = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0.$$
Donc $P(x)$ ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$.

2. $P_2(x) = 4x^2 + 4x + 1$. Son discriminant est :
$$\Delta_2 = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0.$$
Donc $P(x)$ a une racine :
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 4} = -\frac{1}{2},$$
et donc :
$$\boxed{P(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$$

3. $P_3(x) = 2x^2 - 5x - 3$. $P(x)$ a deux racines distinctes : $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 3$ d'après les calculs menés dans les exemples 5.
Donc :
$$\boxed{P(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)}$$
que l'on peut aussi écrire, en développant $2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$:
$$\boxed{P(x) = (2x + 1)(x - 3)}$$

IV. 2. Signe d'un polynôme de degré 2

La propriété suivante est une conséquence de la factorisation d'un polynôme de degré 2.

Propriété 5

Soit $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2, de discriminant Δ.

- Si $\Delta < 0$ alors $\mathrm{P}(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\mathrm{P}(x)$	$\mathrm{sgn}(a)$	

- Si $\Delta = 0$ alors $\mathrm{P}(x)$ est du signe de a, sauf pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ où il s'annule.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$\mathrm{P}(x)$		$\mathrm{sgn}(a)$	0	$\mathrm{sgn}(a)$	

- Si $\Delta > 0$ alors $\mathrm{P}(x)$ est du signe opposé de a entre les racines, et du signe de a ailleurs.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\mathrm{P}(x)$		$\mathrm{sgn}(a)$	0	$\mathrm{sgn}(-a)$	0	$\mathrm{sgn}(a)$	

Exemple 7

Reprenons l'exemple où $\mathrm{P}(x) = 2x^2 - 5x - 3$, dont les racines sont $-\dfrac{1}{2}$ et 3. Alors,

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$\mathrm{P}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

V. Somme et produit des racines

V. 1. Premiers résultats

Propriété 6

Soit $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$, dont le discriminant est supposé strictement positif.
On note alors x_1 et x_2 les deux racines de $\mathrm{P}(x)$.
Alors,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration

D'après la propriété 4, si $\Delta > 0$,

$$\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

En développant le dernier membre de ces égalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a(x^2 - x_2 x - x_1 x + x_1 x_2) \\
ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right] \\
ax^2 + bx + c &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité étant vraie pour toutes les valeurs de x, cela signifie que les coefficients sont égaux entre eux :

$$b = -a(x_1 + x_2) \qquad \text{et} \qquad c = ax_1 x_2\,,$$

c'est-à-dire :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

V. 2. Exploiter la somme et le produit des racines

Propriété 7

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels.
Posons :

$$\mathrm{S} = x_1 + x_2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P} = x_1 x_2.$$

Alors, x_1 et x_2 sont les racines du polynôme :

$$x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P}.$$

Démonstration

Posons $f(x) = x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P}$, avec $\mathrm{S} = x_1 + x_2$ et $\mathrm{P} = x_1 x_2$.

- $$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1 x2 \\ &= x_1^2 - x_1^2 - x_2 x_1 + x_1 x_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$
  Donc x_1 est une racine de $f(x)$.
- $$\begin{aligned} f(x_2) &= x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1 x2 \\ &= x_2^2 - x_1 x_2 - x_2^2 + x_1 x_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$
  Donc x_2 est une racine de $f(x)$.

Remarque. Si on pose $S(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ et $P(x_1, x_2) = x_1x_2$, alors remarquez que :

$$S(x_1, x_2) = S(x_2, x_1) \qquad \text{et} \qquad P(x_1, x_2) = P(x_2, x_1).$$

On dit ici que les fonctions S et P sont **symétriques** en x_1 et x_2.

Exemple 8 (trouver les dimensions d'un rectangle)

Un champ rectangulaire a une aire égale à 7 560 m^2 et un périmètre de 354 m.
Quelles sont les dimensions de ce champ ?

Notons x_1 et x_2 les dimensions de ce champ.
Son aire vaut 7 560 donc $x_1x_2 = 7\,560$.
Son périmètre vaut 354 donc $2(x_1 + x_2) = 354$, soit $x_1 + x_2 = 177$.

D'après la propriété 7, x_1 et x_2 sont les racines du polynôme :

$$x^2 - 177x + 7\,560$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = (-177)^2 - 4 \times 7\,560 = 1\,089.$$

Ainsi,

$$x_1 = \frac{177 - \sqrt{1\,089}}{2} = 72$$

et

$$x_1 = \frac{177 + \sqrt{1\,089}}{2} = 105.$$

Les dimensions du champ sont donc 105 m et 72 m.