CHAPITRE 1

Multiples, diviseurs et nombres premiers

Plan de ce chapitre

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser principalement aux nombres entiers.

I. Multiples et diviseurs

I. 1. Définitions

Déf. 1

Soit n un nombre entier (naturel ou relatif).

- On appelle **diviseurs** de n tous les nombres entiers q tels que $\frac{n}{q} \in \mathbb{Z}$.
- On appelle **multiples** de n tous les nombres de la forme $k \times n$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples 1

1. 2 est un diviseur de 12 car $\frac{12}{2} = 6 \in \mathbb{Z}$.
2. 45 est un multiple de 9 car $45 = 5 \times 9$.

Remarque. Si q est un diviseur de n alors on dit que n est *divisible* par q.

I. 2. Critères de divisibilité

Déf. 2

Un **critère de divisibilité** est une règle permettant de savoir si un entier est divisible par un autre entier.

I. 2. a. Critère de divisibilité par 2

Propriété 1

Un entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemples 2

1. 78 est divisible par 2 car son chiffre des unités est 8.
2. 106 est divisible par 2 car son chiffre des unité est 6.

Remarque. Quand un entier est divisible par 2, on dit qu'il est pair.
Sinon, on dit qu'il est impair.

Propriété 2

Si n est pair alors il existe un entier k tel que $n = 2k$.
Si n est impair alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

I. 2. b. Critère de divisibilité par 3

Propriété 3

Un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3.

Exemples 3

1. 123 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres est $1+2+3=6$, et 6 est divisible par 3.
2. 10 101 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres $1+0+1+0+1=3$ est divisible par 3.

I. 2. c. Critère de divisibilité par 5

Propriété 4

Un entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.

Exemples 4

1. 125 est divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.
2. 10 100 est divisible par 5 son chiffre des unités est 0.

I. 2. d. Un propriété importante

Propriété 5

Soient p et q deux entiers. Un entier n est divisible par $p \times q$ si et seulement si il est divisible par p et q.

Exemples 5

1. 312 est divisible par 2 et par 3 donc il est divisible par 6.
2. 455 est divisible par 35 donc il est divisible par 7 et par 5.

I. 3. Somme de deux multiples

Propriété 6

Soient a un entier relatif.
Soient m et n deux entiers multiples de a.

Alors $m+n$ est un multiple de a.

Démonstration

m est un multiple de a donc il existe un entier k tel que $m = ka$.
De même, n est un multiple de a donc il existe un entier k' tel que $n = k'a$.
Ainsi,

$$m+n = ka + k'a = (k+k')a.$$

Or, $k \in \mathbb{Z}$ et $k'_i n\mathbb{Z}$ donc $k+k' \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $(k+k')a$ est un multiple de a.
Donc $m+n$ est un multiple de a.

I. 4. Carré d'un nombre impair

Propriété 7

Soit a un nombre impair.
Alors, a^2 est impair.

Démonstration

Si a est impair alors il existe un entier k tel que :

$$a = 2k+1.$$

Ainsi,

$$a^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2\times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Or, $4k^2 = 2\times 2k^2$ et $4k = 2\times 2k$ donc ce sont deux nombres pairs. Ainsi, leur somme est aussi paire. Donc, quand on ajoute 1 à cette somme, cela donne un résultat impair.
Par conséquent, $4k^2+4k+1$ est impair, donc a^2 est impair.

II. ppcm et pgcd

II. 1. ppcm

Définition 3

Soient a et b deux entiers.
On appelle **ppcm** (plus petit commun multiple) de a et b le plus petit nombre m qui est à la fois multiple de a et de b.

On le note $\text{ppcm}(a\,;\,b)$.

Exemple 6

Si $a = 6$ et $b = 15$ alors $\text{ppcm}(6\,;\,15) = 30$ car :

- les multiples de 6 sont : 6, 12, 18, 24, 30, 36, etc.
- les multiples de 15 sont : 15, 30, 45, etc.

Le plus petit multiple commun est donc 30.

II. 2. pgcd

Définition 4

Soient a et b deux entiers.
On appelle **pgcd** (plus grand commun diviseur) de a et b le plus grand nombre d qui divise à la fois a et b.

On le note $\text{pgcd}\,(a\,;\,b)$.

Exemple 7

Si $a = 210$ et $b = 49$ alors $\text{pgcd}\,(201\,;\,49) = 7$ car :

- $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Les diviseurs de 210 sont donc :

1	5	$2 \times 5 = 10$	$7 \times 3 = 21$	$2 \times 3 \times 7 = 42$
2	$2 \times 3 = 6$	$7 \times 2 = 14$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$3 \times 5 \times 7 = 105$
3	7	$5 \times 3 = 15$	$5 \times 7 = 35$	210.

- $49 = 7 \times 7$

Ainsi, le plus grand diviseur commun est 7.

Remarque. Dans la pratique, on n'énumère pas les diviseurs car la liste peut être très longue. On préfèrera utiliser la propriété suivante.

Propriété 8

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$ et $q \in \mathbb{N}$.
Alors, $\text{pgcd}(a\,;\,b) = \text{pgcd}(b\,;\,r)$.

Pour calculer le pgcd de deux nombres, on utilisera la propriété précédente autant que nécessaire.
Par exemple, pour calculer $\text{pgcd}(126\,;\,24)$:

- on écrit d'abord que $126 = 5 \times 24 + 6$, donc $\text{pgcd}(126\,;\,24) = \text{pgcd}(24\,;\,6)$;
- on écrit ensuite que $24 = 4 \times 6 + 0$, donc $\text{pgcd}(24\,;\,6) = \text{pgcd}(6\,;\,0) = 6$.

L'écriture $a = bq + r$ est appelée la *division euclidienne* de a par b.
Le fait d'écrire les divisions euclidiennes successives tel que nous l'avons fait constitue ce que l'on nomme l'*algorithme d'Euclide*.

Propriété 9

Soient a et b deux entiers naturels. Alors, $\text{pgcd}(a\,;\,b)$ est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide.

Exemple 8

$a = 775$ et $b = 372$.
L'algorithme d'Euclide donne :

$$\begin{aligned} 775 &= 2 \times 372 + \boxed{31} \\ 372 &= 12 \times 31 + 0. \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 31 donc $\text{pgcd}(775\,;\,372) = 31$.

Propriété 10

$$\text{pgcd}(a\,;\,b) = 1 \iff \frac{a}{b} \text{ est irréductible.}$$

Si $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible alors on divise a et b par $\text{pgcd}(a\,;\,b)$ pour simplifier au maximum la fraction.

Exemple 9

$\text{pgcd}(775\,;\,372) = 31$ (voir exemple précédent) donc $\dfrac{775}{372} = \dfrac{775 \div 31}{372 \div 31} = \dfrac{25}{12}$.

Propriété 11

Pour tous entiers naturels a et b,

$$\text{ppcm}(a\,;\,b) \times \text{pgcd}(a\,;\,b) = ab.$$

III. Nombres premiers

III. 1. Définition

Déf. 5 Un entier naturel est **premier** s'il admet deux uniques diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque. Le nombre « 1 » n'est pas premier car il n'admet qu'un seul diviseur (et non 2).

La liste des nombres premiers commence ainsi :

$$2\,;3\,;5\,;7\,;11\,;13\,;17\,;19\,;23\,;\ldots$$

Remarque. Cette liste ne s'arrête pas; on dit que l'ensemble des nombres premiers est infini (mais ce n'est pas au programme...).

III. 2. Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété 12

Tout entier naturel a s'écrit de manière unique sous la forme :

$$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_n^{\alpha_n}$$

où p_1, p_2, ..., p_n sont des nombres premiers et où α_1, α_2, ..., α_n sont des entiers naturels.

Exemple 10

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.
Pour trouver cette décomposition, on peut diviser autant que nécessaire par 2, puis par 3, puis par 5, etc.

	360	2	← on divise par 2 car 360 est pair
résultat de $360 \div 2 \rightarrow$	180	2	← on divise par 2 car 180 est pair
résultat de $180 \div 2 \rightarrow$	90	2	← on divise par 2 car 90 est pair
résultat de $90 \div 2 \rightarrow$	45	3	← on divise par 3 car 45 n'est plus divisible par 2, donc on passe au nombre premier suivant
résultat de $45 \div 3$	15	3	← on continue à diviser par 3
résultat de $15 \div 3$	5	5	← on passe à 5, qui vient après 3
résultat de $5 \div 5$	1	1	← on s'arrête quand on obtient 1.

On a ainsi obtenu que $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ (on regarde les nombres de droite).