CHAPITRE 10

Fonctions carrés

Plan de ce chapitre

Ce chapitre n'est pas explicitement au programme. Je tenais toutefois à le mettre car certain.e.s enseignant.e.s peuvent tout de même parler de fonctions carrés dans leurs cours.

I. Lien avec la fonction carré

I. 1. Première approche

On pose $f(x) = x^2$ (la fonction carré).
Cette fonction peut-être modifiée en prenant par exemple pour variable $x - \alpha$, où α est un réel non nul. Dans ce cas, on peut nommer g la fonction ainsi obtenue :

$$g(x) = f(x - \alpha) = (x - \alpha)^2.$$

On peut aussi, à partir de la fonction f, ajouter une constante et considérer la fonction :

$$h(x) = f(x) + \beta = x^2 + \beta.$$

On peut aussi multiplier $f(x)$ par une constante $a \neq 0$ et obtenir une fonction :

$$p(x) = ax^2.$$

Et puis, on peut tout faire en même temps et considérer la fonction :

$$c(x) = af(x - \alpha) + \beta.$$

Pour résumer, à partir de la fonction carré, avec les opérations de base que sont l'addition et la multiplication, on peut obtenir d'autres fonctions où intervient x^2, mais où il n'est pas seul.

Ce sont toutes ces fonctions que l'on appelle les fonctions carrés.

I. 2. Définition

Définition 1

On appelle **fonctions carrés** toutes les fonctions f de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont trois réels, avec $a \neq 0$.

Exemples 1

1. $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ est une fonction carré.
2. $g(x) = 3x^2 - 5$ est une fonction carré.
3. $h(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8x$ est une fonction carré.

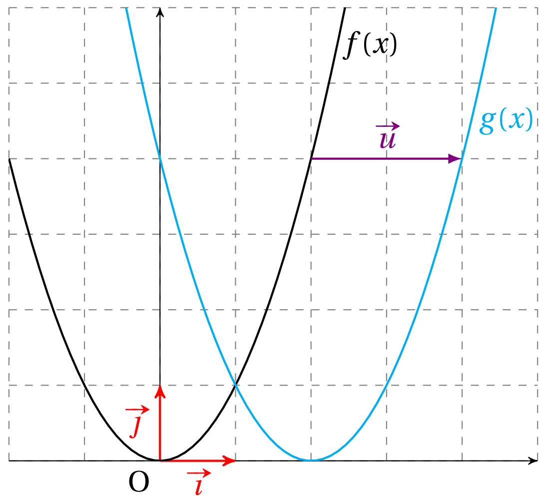
I. 3. Transformations de la fonction carré

Posons $f(x) = x^2$.

- La courbe représentative de la fonction $g(x) = f(x-\alpha)$ est obtenue à partir de celle de la fonction f par translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}$.

Exemple 2

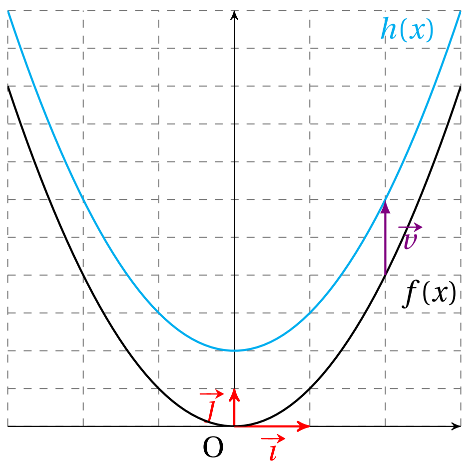
$g(x) = f(x-2) = (x-2)^2$: ici, $\alpha = 2$ donc on effectue une translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.



- La courbe représentative de la fonction $h(x) = f(x) + \beta$ est obtenue à partir de celle de la fonction f par translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\\beta\end{pmatrix}$.

Exemple 3

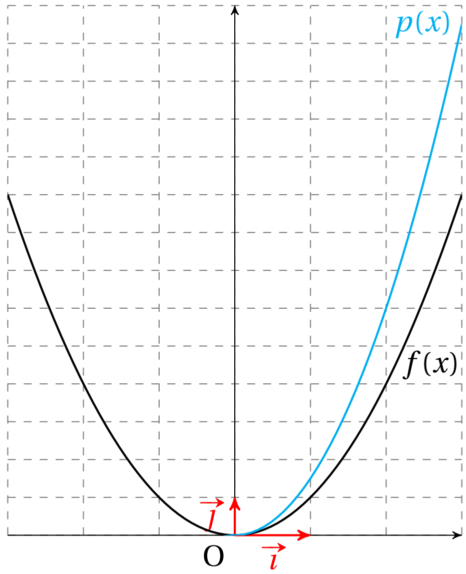
$g(x) = f(x) + 2 = x^2 + 2$: ici, $\beta = 2$ donc on effectue une translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.



- La courbe représentative de la fonction $p(x) = kf(x)$ est obtenue à partir de celle de la fonction f par « étirement » (vers le haut si $k > 0$ ou vers le bas si $k < 0$) car on multiplie par k toutes les images $f(x)$, donc tous les y. Cette construction est bien moins simple à faire concrètement que la translation, mais vous n'aurez pas à le faire : c'est juste pour que vous compreniez ce qui va suivre...

Exemple 4

$h(x) = 1{,}5f(x) = 1{,}5x^2$.



Si on combine ces trois transformations, on obtient une fonction :

$$c(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$

II. Forme canonique

II. 1. Définition

Définition 2

Soit f une fonction carré.
La **forme canonique** de f est :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où $a \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Exemples 5

1. $-2(x-1)^2 + 5$ est la forme canonique d'une fonction carré, où $a = -2$, $\alpha = 1$ et $\beta = 5$.
2. $\frac{1}{3}(x+4)^2$ est la forme canonique d'une fonction carré, où $a = \frac{1}{3}$, $\alpha = -4$ et $\beta = 0$.

II. 2. Variations

Propriété 1

Soit $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

- Si $a < 0$, on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

On voit ainsi que :

- si $a > 0$, f admet un **minimum** en $x = \alpha$, et ce minimum vaut alors β ;
- si $a < 0$, f admet un **maximum** en $x = \alpha$, et ce maximum vaut alors β.