CHAPITRE 11

Statistique descriptive

Plan de ce chapitre

I. Pourcentages & proportions

I. 1. Partie d'un tout

Propriété 1

On considère un ensemble constitué de n éléments.
Dans cet ensemble, on considère un sous-groupe A constitué de x éléments.

Le pourcentage représentant x par rapport à n est :

$$\frac{x}{n} \times 100.$$

Exemple 1

Si une ville est constituée de 150 000 habitants et qu'un quartier de cette ville compte 30 000 habitants, alors le pourcentage correspondant est :

$$\frac{30\,000}{150\,000} \times 100 = 20\,\%.$$

Il y a donc 20 % des habitants de cette ville qui habitent dans ce quartier.

I. 2. Partie d'une partie

Propriété 2

On considère un ensemble E constitué de n éléments.
Dans cet ensemble, on considère un sous-groupe A constitué de x_{A}% éléments de E, et un sous-groupe B de A constitué de x_{B}% éléments de A.

Le pourcentage d'éléments dans B par rapport à l'ensemble E est alors :

$$x_{\text{A}} \times x_{\text{B}}\%.$$

Exemple 2

Dans une ville, 20 % des habitants résident dans un quartier Q.
Dans ce quartier, 40 % ont un salaire inférieur à 1 100€. Cela représente :

$$\frac{20}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{800}{10\,000} = \frac{8}{100} = 8\,\%$$

de la ville.

II. Évolutions

II. 1. Évolution simple

Propriété 3

Soit x un nombre.

1. Si x *augmente* de t% alors la valeur finale est égale à $\left(1+\frac{t}{100}\right)x$.

2. Si x *diminue* de t% alors la valeur finale est égale à $\left(1+\frac{t}{100}\right)x$.

Exemples 3

1. Un tee-shirt « Adada » est normalement vendu à 150 €dans la boutique de monsieur Arnac. Il décide d'augmenter ce prix de 20 %. Le prix final sera alors :

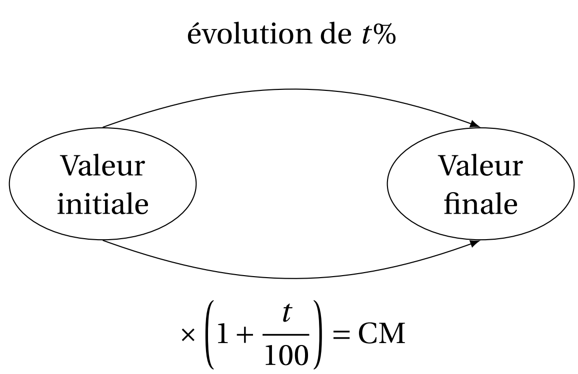
$$\left(\frac{1+20}{100}\right)\times 150 = 1{,}2\times 150 = 180\text{ €}.$$

‘

2. Dans la boutique de monsieur Bonepouar, ce même tee-shirt est à 110 €. Il décide de le solder à −30 %. Le prix final sera alors :

$$\left(1-\frac{30}{100}\right)\times 110 = 0{,}7\times 110 = 77\text{ €}.$$

Déf. 1 Lors d'une évolution de t% (avec $t>0$ ou $t<0$), le nombre $\left(1+\frac{t}{100}\right)$ es appelé le *coefficient multiplicateur* (en abrégé : CM).



Remarque. On dit ici que l'évolution est *relative* car elle dépend de la valeur initiale.

Propriété 4

Soient deux valeurs V_1 et V_2, et soit CM le coefficient multiplicateur représentant l'évolution de V_1 à V_2. Alors,

$$CM = \frac{V_2}{V_1}.$$

Exemple 4

Un article est passé de 150 €à 120 €. Le coefficient multiplicateur est donc :

$$CM = \frac{120}{150} = 0,8.$$

Remarque. Si $0 < CM < 1$ alors l'évolution est une réduction.
Si $CM > 1$ alors l'évolution est une augmentation.

II. 2. Évolutions successives

Propriété 5

Faire deux évolutions successives de $t_1\,\%$ et $t_2\,\%$ revient à multiplier par $\left(1+\frac{t_1}{100}\right)\left(1+\frac{t_2}{100}\right)$.

Exemples 5

1. Un article vaut 150 €. Son prix diminue de 10 % puis augmente de 10 %. Le prix final est alors :
$$150 \times \left(1-\frac{10}{100}\right) \times \left(1+\frac{10}{100}\right) = 150 \times 0,9 \times 1,1 = 148,50\text{ €}.$$
2. Un article coûte 140 €. Son prix subit une première hausse de 5 %, puis une seconde hausse de 5 %. Le prix final est alors :
$$140 \times \left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = 140 \times 1,05^2 = 154,35\text{ €}.$$

Remarque. Cette propriété revient à dire que lors de deux évolutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient :

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2.$$

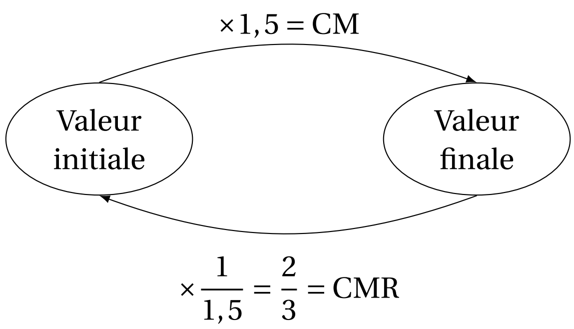
II. 3. Évolution réciproque

Définition 2

Soient deux valeurs V_1 et V_2, et soit CM le coefficient multiplicateur représentant l'évolution de V_1 à V_2. Alors, le coefficient multiplicateur réciproque est :

$$\mathrm{CMR} = \frac{1}{\mathrm{CM}} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Exemple 6



III. Indicateurs d'une série statistique

III. 1. Moyenne pondérée

Définition 3

On considère la série statistique représentée par le tableau ci-dessous :

Caractères x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_p
Effectifs n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_p

La **moyenne pondérée** de cette série est :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}.$$

Exemple 7

Jean-Simon a obtenu en mathématiques les notes suivantes au cours du deuxième trimestre :

Notes	18	12	8	14
Coefficients	1	2	3	2

Sa moyenne en mathématiques au deuxième trimestre est donc :

$$\overline{x} = \frac{18 \times 1 + 12 \times 2 + 8 \times 3 + 14 \times 2}{1 + 2 + 3 + 2} = 11,75.$$

Propriété 6

On considère deux séries statistiques S_1 et S_2 :

- S_1 a pour effectif total N_1, et a pour moyenne $\overline{x}_1$;
- S_2 a pour effectif total N_2, et a pour moyenne $\overline{x}_2$.

Alors, la moyenne de la série constituée des deux séries S_1 et S_2 a pur moyenne :

$$\overline{x} = \frac{N_1 \times \overline{x}_1 + N_2 \times \overline{x}_2}{N_1 + N_2}.$$

Exemple 8

Monsieur Lessadic fait un même contrôle à ses deux classes de Seconde.

- En Seconde A, la moyenne est égale à 11,2 sur un effectif total de 25 élèves.
- En Seconde B, la moyenne est égale à 7,8 sur un effectif total de 32 élèves.

La moyenne générale sur ces deux classes à ce contrôle est donc :

$$\overline{x} = \frac{25 \times 11,2 + 32 \times 7,8}{25 + 32} \approx 9,3.$$

Propriété 7 (linéarité de la moyenne)

On considère une série statistique $S = \left\{(x_i\,;n_i)\right\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$, de moyenne $\overline{x}$.
Alors, la moyenne de la série $S' = \left\{(ax_i + b\,;n_i)\right\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ (obtenue en multipliant par a toutes les valeurs de la série S et en leur ajoutant b) est :

$$\overline{x}' = a\overline{x} + b.$$

Exemple 9

Monsieur Lessadic constate que la moyenne générale de ses deux classes de Seconde est égale à 9,3. Il souhaite que cette moyenne soit égale à 10. Il a plusieurs possibilités, dont :

- 1re possibilité : il ajoute 0,7 point à chaque note ; dans ce cas, il obtient une série $S' = \left\{(x_i + 0,7\,;n_i)\right\}$ et la moyenne de cette nouvelle série est alors :

$$\overline{x}' = \overline{x} + 0,7 = 9,3 + 0,7 = 10.$$

- 2e possibilité : il multiplie toutes les notes par $\dfrac{10}{9,3}$. Il obtient donc une série $S' = \left\{\left(\frac{10}{9,3}x_i\,;n_i\right)\right\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dont la moyenne est :

$$\overline{x}' = \frac{10}{9,3} \times \overline{x} = \frac{10}{9,3} \times 9,3 = 10.$$

III. 2. Écart interquartile

Déf. 4

- On appelle **premier quartile** d'une série statistique, et on note Q_1, la valeur du caractère pour lequel 25 % des valeurs lui sont inférieures.
- On appelle **troisième quartile** d'une série statistique, et on note Q_3, la valeur du caractère pour lequel 75 % des valeurs lui sont inférieures.
- On appelle **écart interquartile** le nombre $Q_3 - Q_1$.

Exemple 10

On considère la série statistique suivante, représentant les diverses notes d'une classe lors d'un contrôle noté sur 10 :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	1	1	2	5	3	8	6	5	3	1	1
E.c.c.	1	2	4	9	12	20	26	31	34	35	36

25 % de l'effectif total

75 % de l'effectif total sont dépassés

- $Q_1 = 3$ car pour la note « 3 », on a atteint un effectif cumulé croissant (E.c.c.) de 9, qui est le quart (25 %) de l'effectif total (36).
- $Q_3 = 7$ car pour la note « 7 », on a dépassé les $\frac{3}{4}$ (les 75 %) de l'effectif total.
- L'écart interquartile est donc $Q_3 - Q_1 = 7 - 3 = 4$.

III. 3. Variance et écart-type

Définitions 5

On considère une série statistique $S = \left\{(x_i\,;n_i)\right\}_{1\leqslant i\leqslant p}$, de moyenne $\overline{x}$.

- La **variance** de la série est la valeur V telle que :

$$V = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p-\overline{x})^2}{n_1+n_2+\cdots+n_p}.$$

- L'**écart-type** de la série est la valeur σ telle que :

$$\sigma = \sqrt{V}.$$

Exemple 11

On considère la série représentée par le tableau suivant :

n_i	x_i
6	7
3	8
4	9
3	10

Sa moyenne est $\overline{x} = 8,25$.

On considère alors la série dont les effectifs sont les mêmes mais où les valeurs sont égales à $(x_i - \overline{x})^2$:

n_i	$(x_i - \overline{x})^2$
6	1,5625
3	0,0625
4	0,5625
3	3,0625

La variance est la moyenne de cette nouvelle série :

$$\mathrm{V} = \frac{6 \times 1,5625 + \cdots + 3 \times 3,0625}{6+3+4+3} = 1,3125.$$

L'écart-type est donc :

$$\sigma = \sqrt{1,3125} \approx 1,15.$$