CHAPITRE 12

Probabilités

Plan de ce chapitre

I. Vocabulaire

I. 1. Expérience aléatoire

Déf. 1 Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les issues sont obtenues par hasard.

L'ensemble de toutes les issues que l'on peut obtenir est appelé l'**univers**. On le note : Ω (Oméga).

Exemple 1

On considère l'expérience qui consiste à lancer un dé tétraédrique (4 faces numérotées 1, 2, 3 et 4). On s'intéresse à la face obtenue (au numéro qu'elle porte). Pour un dé tétraédrique, c'est la face cachée.
Si le dé n'est pas pipé (truqué), c'est une expérience aléatoire car on ne sait pas à l'avance quelle face sera obtenue.
L'univers est ici : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

I. 2. Événement

Déf. 2 On appelle **événement** d'une expérience aléatoire une des issues possibles.

Exemple 2

Dans le lancer de dé tétraédrique, « obtenir un 1 » est un événement.
De même, « obtenir un 2 » est un événement. Idem pour les autres faces.
L'univers est donc ici composé de 4 événements.

I. 3. Réunion d'événements

Déf. 3 Soient A et B deux événements d'un univers Ω.
On appelle **réunion** de A et B l'événement « A ou B est réalisé. »
On note cette réunion : $A \cup B$.

Exemple 3

On lance un dé cubique et on note :

- A l'événement : « obtenir un nombre pair »
- B l'événement : « obtenir un multiple de 3 »

L'événement $A \cup B$ est alors : « obtenir un nombre pair ou un multiple de 3 ».

Remarque. Dans ce dernier exemple, on peut aussi *décrire* la réunion :

- $A = \{2 ; 4 ; 6\}$;
- $B = \{3 ; 6\}$;
- $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}$.

En effet, $A \cup B$ est constitué des nombres compris entre 1 et 6 qui sont pairs ou multiples de 3 (ou les deux).

I. 4. Intersection d'événements

Déf. 4

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.
On appelle **intersection** de A et B l'événement « A et B sont réalisés en même temps. »
On note cette réunion : $A \cap B$.

Exemple 4

On lance un dé cubique et on note :

- A l'événement : « obtenir un nombre pair »
- B l'événement : « obtenir un multiple de 3 »

L'événement $A \cap B$ est alors : « obtenir un nombre pair et un multiple de 3 », c'est-à-dire : « obtenir 6 ».

Remarque. Dans ce dernier exemple, on peut aussi *décrire* l'intersection :

- $A = \{2 ; 4 ; 6\}$;
- $B = \{3 ; 6\}$;
- $A \cap B = \{6\}$.

En effet, $A \cap B$ est constitué des nombres compris entre 1 et 6 qui sont à la fois pairs et multiples de 3 ; il n'y a donc que le nombre 6.

I. 5. Événement complémentaire

Déf. 5

Soit A un événement d'un univers Ω.
Le **complémentaire de A** est l'événement : « A n'est pas réalisé ». On le note $\overline{A}$ (on le lit souvent : *A barre*).

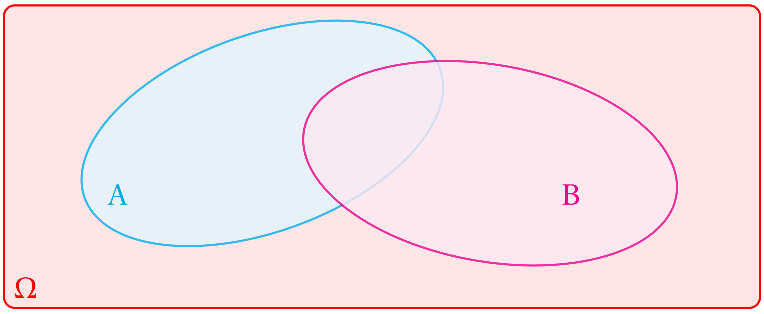
Exemple 5

Soit $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

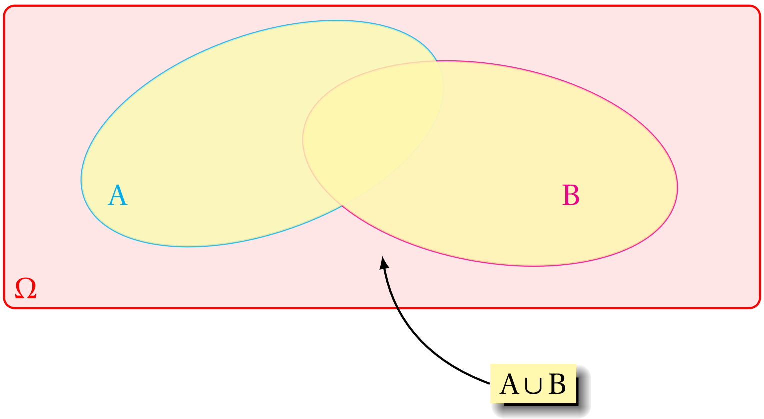
- Si $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ alors $\overline{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$;
- Si $B = \{3 ; 6\}$ alors $\overline{B} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5\}$.

II. Diagrammes de Venn

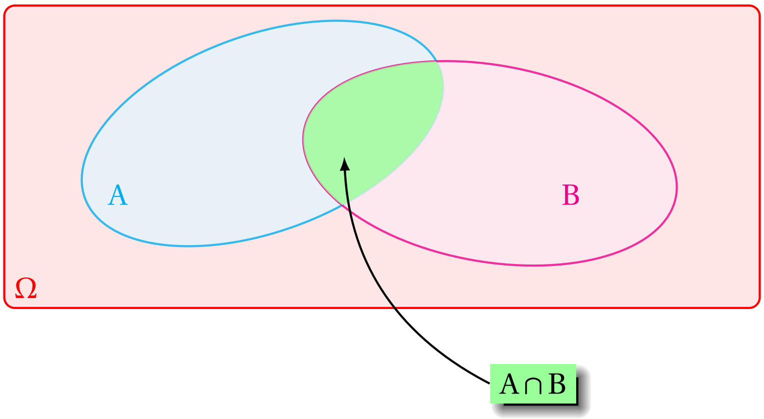
Une expérience aléatoire ainsi que des événements de cette expérience peuvent être modélisés par un dessin ; c'est un diagramme de Venn.



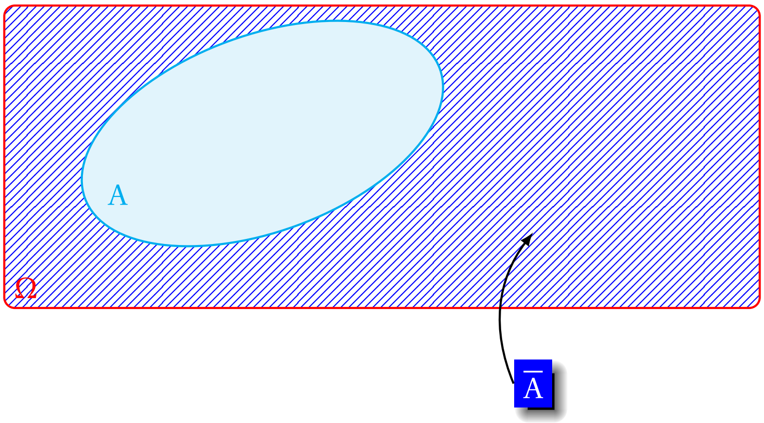
II. 1. Réunion



II. 2. Intersection



II. 3. Complémentaire

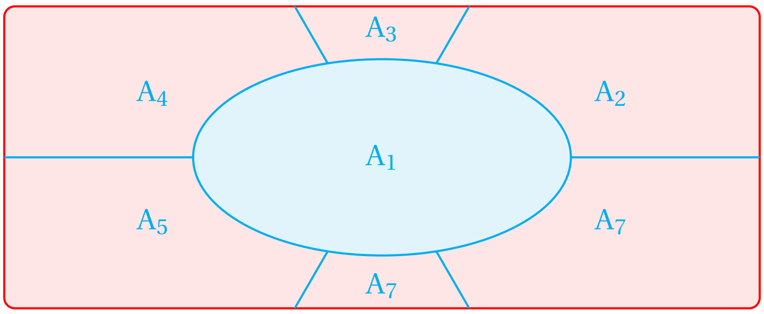


II. 4. Partition de l'univers

Déf. 6 On dit que des événements A_1, A_2, ..., A_n forment une **partition de l'univers** Ω si :

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \\ A_i \cap A_j = \varnothing \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

On peut représenter une partition par exemple de la façon suivante :



III. Probabilités

III. 1. Loi de probabilité

Définitions 7 Une **loi de probabilité** est un modèle que l'on adopte en fonction de l'expérience aléatoire menée.

Si toutes les issues ont la même probabilité d'être obtenues, la loi de probabilité usuelle que l'on choisit est l'**équiprobabilité**.

Si l'on peut calculer les probabilités de chaque issue dans un cas autre que l'équiprobabilité, la loi de probabilité peut-être donnée sous forme de tableau contenant les probabilités de toutes les issues.

Exemples 6

1. Si l'expérience consiste à lancer un dé cubique et à regarder la face obtenue, il y a équiprobabilité car toutes les faces ont une probabilité égale à $\frac{1}{6}$ d'être obtenue.
2. Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte. On considère les événements :
   - F : « on choisit une figure » ;
   - A : « on choisit un as »
   - D : « on choisit un 7, 8, 9 ou 10 ».

   La loi de probabilité de cette expérience est donnée par le tableau suivant :

Événements	F	A	D
Probabilités	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

   En effet, il y a 3 figures par famille – qui compte 8 cartes (donc $P(F) = \frac{3}{8}$) ; de plus, il y a 1 As par famille (donc $P(A) = \frac{1}{8}$) et il y a 4 cartes sur 8 qui sont des 7, 8, 9 ou 10 (donc $P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$).

III. 2. Propriétés fondamentales

Propriété 1

Soit Ω un univers et soient A_1, A_2, ..., A_n des événements de formant une partition de Ω. Alors, $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$.

Exemple 7

Si on reprend la question **2.** de l'exemple 6, les événements F, A et D forment une partition de l'univers, et la somme des probabilités trouvées est bien égale à 1 :

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 1.$$

Propriété 2

Soient A et B deux événements d'un univers Ω. Alors,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Cela vient du fait que $A \cup B$ *se trouve en prenant* A *et* B*, mais en prenant* B*, on a pris aussi une partie de* A *(qui est* $A \cap B$*) qu'il faut enlever sinon on l'aura prise deux fois.*

IV. Méthodes de dénombrement

Il existe deux méthodes principales pour dénombrer : le tableau à double entrée et l'arbre.

IV. 1. Le tableau à double entrée

Il est souvent utilisé quand on s'intéresse à deux caractères dans un même univers.

Exemple 8

Dans un lycée, il y a 50 % d'élèves de Seconde, 30 % d'élèves de Première et 20 % d'élèves de Terminale.
Parmi les élèves de Seconde, il y en a 48 % qui sont des filles.
Parmi les élèves de Première, il y en a 51 % qui sont des filles.
Parmi les élèves de Terminale, il y en a 55 % qui sont des filles.
La répartition peut alors se représentée par le tableau suivant :

Classes / Genres	Seconde	Première	Terminale	Total
Filles	24 %	15,3 %	11 %	50,3 %
Garçons	26 %	14,7 %	9 %	49,7 %
Total	50 %	30 %	20 %	100 %

- On commence par mettre 50 %, 30 % et 20 % sur la dernière ligne car cela représente le total (en pourcentage) de chaque classe.
- Ensuite, on calcule 48 % de 50 % : $\frac{48}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{24}{100}$, ce qui correspond au pourcentage de filles de Seconde <u>par rapport à l'ensemble du lycée</u>.
  On fait de même pour les autres pourcentages des filles.
- On finit ensuite en complétant la ligne des garçons de sorte que le total des pourcentages de chaque colonne soit égal à celui indiqué en dernière ligne.

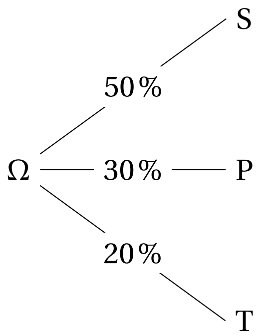
1. On peut ainsi dire, par exemple, que si on choisit au hasard un élève de ce lycée,
   (a) la probabilité que ce soit un garçon de Terminale est égale à 9 % ;
   (b) la probabilité que ce soit une fille est égale à 50,3 %.
2. Si maintenant on choisit un élève parmi les garçons, la probabilité qu'il soit en Première est égale à $\frac{14,7}{49,7}$, soit $\frac{147}{497} = \frac{21}{71}$. Attention ici, l'univers n'est plus l'ensemble du lycée mais l'ensemble des garçons.

IV. 2. L'arbre des possibilités (ou arbre des probabilités)

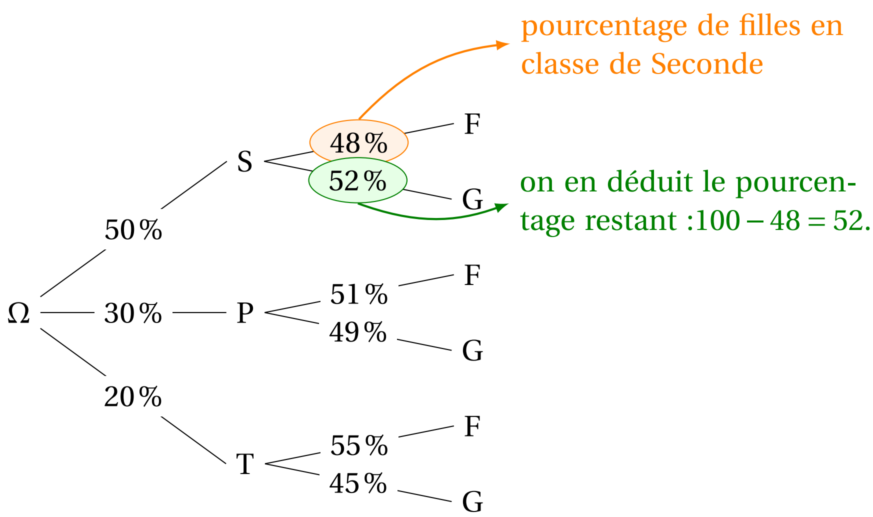
C'est sans nul doute la représentation la plus répandue en probabilités.
Reprenons l'exemple 8, et notons :

- S l'événement : « l'élève choisi.e. est en Seconde » ;
- P l'événement : « l'élève choisi.e. est en Première » ;
- T l'événement : « l'élève choisi.e. est en Terminale » ;
- F l'événement : « l'élève choisie est une fille » ;
- G l'événement : « l'élève choisi est un garçon » ;

L'énoncé nous parle en premier de la répartition des élèves en fonction de leur classe, donc le premier niveau de l'arbre doit concerner les classes :



On complète ensuite le second niveau de l'arbre par les possibilités : pour chaque élève de Seconde, Première et Terminale, nous avons la possibilité que l'élève soit une fille ou un garçon :



L'événement $T \cap G$ est : « l'élève choisi est un garçon de Terminale ».
Pour calculer $P(P \cap G)$, on multiplie les probabilités des deux branches :

$$\frac{20}{100} \times \frac{45}{100} = \frac{9}{100}.$$

On retrouve bien la probabilité trouvée dans l'exemple 8.

En revanche, la probabilité que l'élève soit en Première sachant que c'est un garçon (calculée à la question 2 de l'exemple 8) ne peut pas se lire directement sur l'arbre.
Toutefois, vous verrez en première une méthode pour la trouver à l'aide de l'arbre.