CHAPITRE 2

Dérivation

Plan de ce chapitre

I. Première approche historique

I. 1. Archimède

Archimède de Syracuse ($-287 - -212$) était un savant grec. Il semblerait qu'il fusse le premier à se pencher sur la notion de *tangente* à une courbe, une droite qui « frôle » une courbe et la touche en un seul point.

I. 2. Torricelli

Plusieurs siècles plus tard, l'italien Torricelli (1608 – 1646) et le français Roberval (1602 – 1675) continuèrent les travaux d'Archimède et apportèrent ainsi les premières notions sérieuses du calcul dit *infinitésimal*.

I. 3. Pierre de Fermat

Le mathématicien français Pierre de Fermat (vers 1610 – 1665), surnommé le « prince des amateurs » car les mathématiques étaient pour lui plus un passe-temps qu'un métier, décrit ensuite la tangente comme la position limite d'une sécante à une courbe. C'est la définition qu'on utilise aujourd'hui (voir paragraphe II).

I. 4. René Descartes

René Descartes (1596 – 1650), souvent très dur envers Fermat, critiquera le manque de rigueur de ce dernier ce qui pousse Fermat à clarifier et à étendre sa méthode.

I. 5. En Angleterre : Wallis, Gregory, Barrow et Newton

Les méthodes analytiques de Descartes et de Fermat ont beaucoup de succès en Angleterre et sont donc reprises par John Wallis (1616 – 1707) et James Gregory (1638 – 1675). Ceci pousse le mathématicien Issac Barrow (1630 – 1677), le prédécesseur d'Isaac Newton (1643 – 1727) à la chaire de mathématiques de l'université de Cambridge à développer une méthode des tangentes par le calcul, très proche de celle actuellement utilisée. Il expose cette méthode dans ses cours.
Puis les mathématiciens anglais Newton (1643 – 1727) et allemand Leibniz (1646 – 1716), indépendamment l'un de l'autre, inventent des procédés algorithmiques, ce qui tend à faire de l'analyse dite *infinitésimale* une branche autonome des mathématiques. Newton publie en 1736 sa méthode la plus célèbre, la *méthode des fluxions et des suites infinies.*

I. 6. Blaise Pascal

C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du XVII^{e} siècle, a le premier mené des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Le marquis de l'Hospital contribuera à diffuser le calcul différentiel de Leibniz à la fin du XVII^{e} siècle grâce à son livre sur l'analyse des infiniment petits. Wallis, mathématicien anglais (surtout connu pour la suite d'intégrales qui porte son nom) contribua également à l'essor de l'analyse différentielle.

Néanmoins cette théorie tout juste éclose n'est pas encore, à l'époque, pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit introduite par Newton, qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable.

I. 7. Jean le Rond d'Alembert

C'est au XVIII^{e} siècle que Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIX^{e} siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

I. 8. Joseph-Louis Lagrange

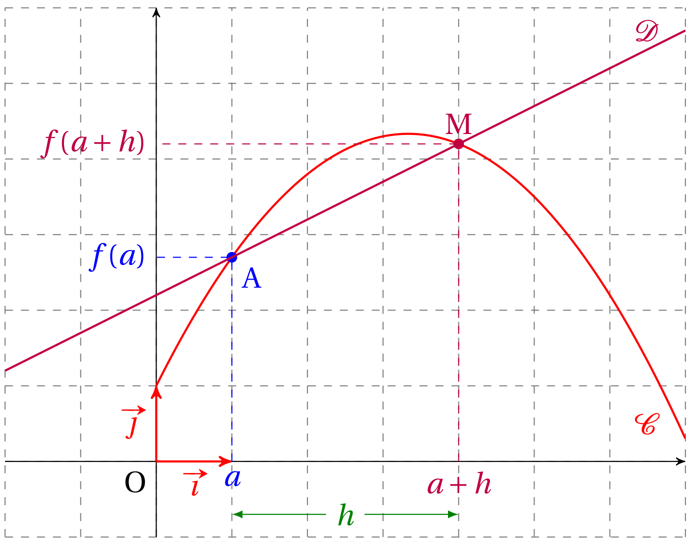
C'est au mathématicien français Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x. C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique.

Source : math93.com.

II. Nombre dérivé

II. 1. Approche géométrique

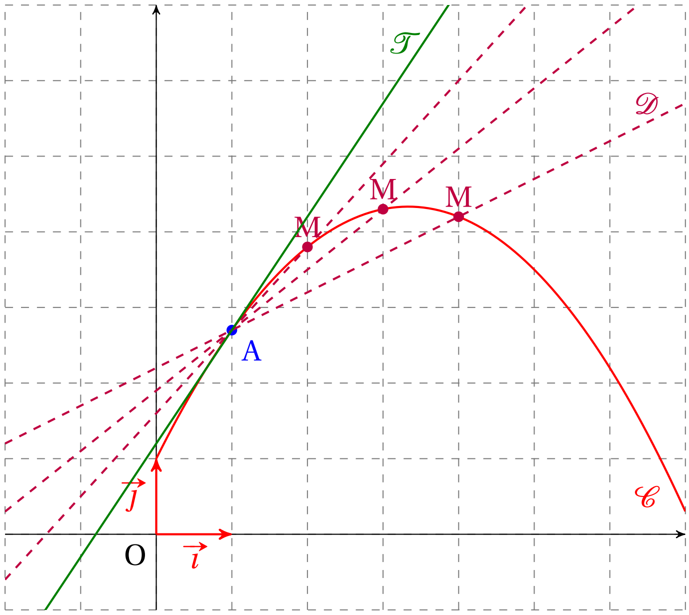
Considérons la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f, et un point $\mathrm{A}\big(a; f(a)\big)$.
Considérons ensuite un point $\mathrm{M}\big(a+h; f(a+h)\big)$ où $h \in \mathbb{R}$, et la droite $\mathscr{D}$ passant par A et M



$\mathscr{D}$ est appelée la **sécante** à $\mathscr{C}$ passant par A et M.
Le coefficient directeur de cette sécante est appelé le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$; d'après la formule vue en classe de Seconde, il est égal à :

$$\frac{y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{A}}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si M se rapproche de A, c'est-à-dire si h se rapproche de 0, alors la droite $\mathscr{D}$ se rapproche d'une droite $\mathscr{T}$ (en vert ci-dessous) qui « frôle » $\mathscr{C}$ et qui la touche au point A.



Ainsi, le taux d'accroissement de f entre a à $a+h$ se rapproche du coefficient directeur de $\mathscr{T}$. On dit que la *limite du taux d'accroissement quand h tend vers 0* est égal au coefficient directeur de $\mathscr{T}$, et on note :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{coefficient directeur de } \mathscr{T}.$$

En prenant $f(x) = -0,3x^2+2x+1$, on peut alors écrire un programme (en Python par exemple) qui écrit les coefficients directeurs successifs de $\mathscr{D}$ quand h se rapproche de 0 :

```python
def f(x):
    return -0.3*x*x+2*x+1

def coef(h,p):
    x = h
    while (x > 1):
        m = (f(x)-f(1))/(x-1)
        print('x = ',x,' ; m = ',m)
        x = x - p

coef(4,0.01)
```

```
...
x = 1.0300000000000418 ;
m = 1.3909999999999818

x = 1.0200000000000418 ;
m = 1.3939999999999821

x = 1.0100000000000418 ;
m = 1.3969999999999885

x = 1.0000000000000417 ;
m = 1.3936170212765957
```

II. 2. Définition et exemples fondamentaux

II. 2. a. Définition

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $a \in$ I.
On définit le **nombre dérivé de f en a** le nombre noté $f'(a)$ tel que :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

II. 2. b. Exemples fondamentaux

Exemple 1 (la fonction carré)

Posons $f(x) = x^2$, et calculons le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, où a est un nombre quelconque et $h > 0$:

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &= \frac{\cancel{a^2}+2ah+h^2-\cancel{a^2}}{h}\\ &= \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}}\\ &= 2a+h.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a+0 = 2a.$$

Quelle que soit la valeur de a, le nombre dérivé de x^2 en a est $f'(a) = 2a$.

Exemple 2 (la fonction cube)

Posons $f(x) = x^3$, et calculons le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, où a est un nombre quelconque et $h > 0$:

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &= \frac{(a+h)^3-a^3}{h}\\ &= \frac{\cancel{a^3}+3a^2h+3ah^2+h^3-\cancel{a^3}}{h}\\ &= \frac{\cancel{h}(3a^2+3ah+h^2)}{\cancel{h}}\\ &= 3a^2+3ah+h^2+h.\end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2+h) = 3a^2.$$

Quelle que soit la valeur de a, le nombre dérivé de x^3 en a est $f'(a) = 3a^2$.

Exemple 3 (la fonction racine carrée)

Posons $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
\tau_a(h) &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\
&= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{a+h}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Quelle que soit la valeur de a, le nombre dérivé de $\sqrt{x}$ en a est $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Exemple 4 (la fonction inverse)

Posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
\tau_a(h) &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} \\
&= \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h} \\
&= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\
&= -\frac{\cancel{h}}{a(a+h)} \times \frac{1}{\cancel{h}} \\
&= -\frac{1}{a(a+h)}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{a(a+h)}\right) = -\frac{1}{a^2}.$$

Quelle que soit la valeur de a, le nombre dérivé de $\dfrac{1}{x}$ en a est $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

II. 3. Interprétations du nombre dérivé

II. 3. a. En physique

Imaginons un corps en chute libre, lâché sans vitesse initiale.
La distance qu'il parcourt en t secondes est égale à $d(t) = 5t^2$.
Sa vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 est :

$$v = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_2}$$

car $v = \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$. On peut aussi noter :

$$d = \frac{\Delta d}{\Delta t},$$

« Δ » désignant ici la variation (et non le discriminant).

La **vitesse instantanée** est la vitesse à un instant donné. Ainsi, la vitesse instantanée à l'instant t peut être vue comme étant égale à $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{d(t+h) - d(t)}{h}$, donc égale à $v'(t)$.

Le nombre dérivé peut donc être perçu comme une vitesse instantanée. En liaison avec la notation $\dfrac{\Delta d}{\Delta t}$ (pour le taux d'accroissement), on peut aussi noter :

$$v'(t) = \frac{\mathrm{d}d(t)}{\mathrm{d}t}.$$

II. 3. b. En économie

On définit le **coût marginal de production** comme le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite. Si C représente le coût total, on note C_m le coût marginal associé.
Le coût marginal sert à évaluer s'il est rentable d'accepter une commande supplémentaire.

On peut alors exprimer le coût marginal par :

$$\mathrm{C}_m(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{C}(x+h) - \mathrm{C}(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{C}(x+h) - \mathrm{C}(x)}{h}.$$

On s'aperçoit que le coût marginal n'est rien d'autre que le nombre dérivé du coût total.

III. Équation de la tangente

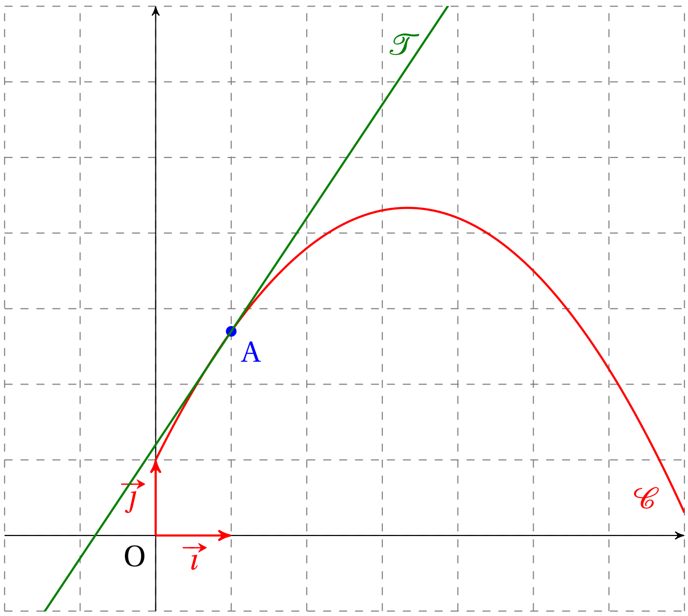
III. 1. Définition

Déf. 2

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $a \in \mathrm{I}$.

On appelle **tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a** la droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par le point de coordonnées $\big(a ; f(a)\big)$.

Exemple 5



$\mathscr{T}$ est ici la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

III. 2. Équation

Propriété 1

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $a \in \mathrm{I}$.

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration

Par définition, le coefficient de la tangente est $f'(a)$ donc l'équation réduite de la tangente est de la forme :

$$y = f'(a)x + p.$$

On sait de plus que le point de coordonnées $\big(a; f(a)\big)$ est sur $\mathscr{C}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

donc :

$$p = f(a) - af'(a).$$

Ainsi, l'équation réduite de la tangente est :

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

soit, en factorisant une partie du second membre par $f'(a)$:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

IV. Fonction dérivée

IV. 1. Définition

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On définit la **fonction dérivée de f** comme étant la fonction :

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x.

Si $f'(x)$ est définie sur un intervalle J inclus dans I alors on dit que f est **dérivable sur J**.

IV. 2. Dérivées de référence

Propriété 2

D'après les exemples 1, 2, 3 et 4, on peut écrire :

1. Si $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Si $f(x) = \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty]$ (la fonction n'est pas dérivable en 0).
4. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

De plus,

5. Si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

IV. 3. Dérivée d'une fonction composée

Propriété 3

Soit la fonction $x \mapsto g(ax+b)$, où a et b sont deux nombres réels.
Alors, sa fonction dérivée est :

$$x \longmapsto ag'(ax+b).$$

Exemples 6

1. $f(x)=\sqrt{-5x+20}$, définie sur $]-\infty;4]$.
   Ici, $g(x)=\sqrt{x}$ et $f(x)=g(-5x+20)$.

   $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(x)=-5g'(-5x+20)$ soit :

$$f'(x)=\frac{-5}{2\sqrt{-5x+20}},\ \text{définie sur }]-\infty;4[.$$

2. $f(x)=\dfrac{1}{4x+12}$, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
   Ici, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ et $f(x)=g(4x+12)$.

   $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(x)=4g'(4x+12)$ soit :

$$f'(x)=-\frac{4}{(4x+12)^2},\ \text{définie sur } \mathbb{R}\setminus\{-3\}.$$

V. Fonction valeur absolue

V. 1. Définition

Déf. 4

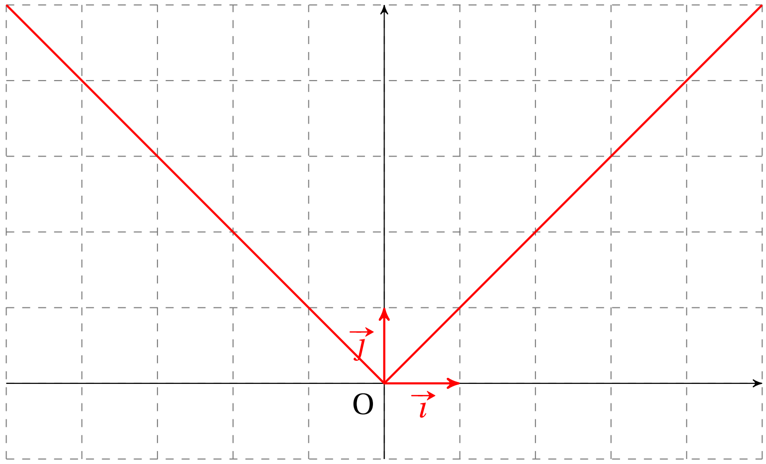
Pour tout réel x, on définit la **valeur absolue de x**, et on note $|x|$, par :

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0\\ -x & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Exemples 7

1. $|-5|=5$ car $-5<0$.
2. $|3|=3$ car $3\geqslant 0$.
3. $|0|=0$.
4. $|\pi|=\pi$ car $\pi\geqslant 0$.

V. 2. Courbe représentative



V. 3. Dérivée

Propriété 4

Soit $f(x) = |x|$. Alors,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et $f'(0)$ n'existe pas.

Remarque. On dit que la fonction n'est pas dérivable en 0.

Démonstration

D'après la relation $(x^n)' = nx^{n-1}$, on sait que la dérivée de $x \longmapsto x$ est $x \longmapsto 1$, et celle de $x \longmapsto -x$ est $x \longmapsto -1$.

Or, si $x < 0$, $|x| = -x$ donc sur $]-\infty;0[$, la dérivée de $x \longmapsto |x|$ est celle de $x \longmapsto -x$, c'est-à-dire $x \longmapsto -1$.

De plus, si $x > 0$, $|x| = x$ donc sur $]0;+\infty[$, la dérivée de $x \longmapsto |x|$ est celle de $x \longmapsto x$, c'est-à-dire $x \longmapsto 1$.

Le nombre dérivé de $x \longmapsto |x|$ à gauche de 0 est donc égal à -1 alors que celui à droite de 0 vaut 1. Ainsi, en 0, il n'y a pas le même nombre dérivé à gauche et à droite : $f'(0)$ n'existe donc pas.

VI. Opérations sur les dérivées

Propriété 5

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

1. $(ku)' = ku'$
2. $(u+v)' = u' + v'$.
3. $(u-v)' = u' - v'$.
4. $(uv)' = u'v + uv'$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 8 (produit d'un nombre et d'une fonction)

$f(x) = 3x^2$. On pose alors $u(x) = x^2$ et $k = 3$. Comme $u'(x) = 2x$, on a :

$$f'(x) = 3 \times 2x = 6x.$$

Exemple 9 (somme)

$f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3x + 1$. Pour calculer $f'(x)$, on calcule la dérivée de chaque terme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3)' + (5x^2)' + (3x)' + (1)' \\ &= 4 \times 3x^2 + 5 \times 2x + 3 \times 1 + 0 \\ &= 12x^2 + 10x + 3. \end{aligned}$$

Exemple 10 (différence)

$f(x) = 8x^5 - 5x^2$. Pour calculer $f'(x)$, on calcule la dérivée de chaque terme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (8x^5)' - (5x^2)' \\ &= 8 \times 5x^4 - 5 \times 2x \\ &= 40x^4 - 10x. \end{aligned}$$

Exemple 11 (produit de deux fonctions)

$f(x) = (3x+1)\sqrt{2x+5}$. On pose :

$$u(x) = 3x+1 \qquad v(x) = \sqrt{2x+5}$$
$$u'(x) = 3 \qquad v'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3 \times \sqrt{2x+5} + (3x+1) \times \frac{1}{\sqrt{2x+5}} \\
&= 3\sqrt{2x+5} + \frac{3x+1}{\sqrt{2x+5}} \\
&= \frac{3\sqrt{2x+5} \times \sqrt{2x+5} + (3x+1)}{\sqrt{2x+5}} \\
&= \frac{3(2x+5) + 3x+1}{\sqrt{2x+5}} \\
&= \frac{9x+16}{\sqrt{2x+5}}.
\end{aligned}$$

Exemple 12 (quotient de deux fonctions)

$f(x) = \dfrac{3x^2-5x+2}{x+3}$. On pose :

$$u(x) = 3x^2-5x+2 \qquad v(x) = x+3$$
$$u'(x) = 6x-5 \qquad v'(x) = 1$$

D'où :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(6x-5) \times (x+3) - (3x^2-5x+2) \times 1}{(x+3)^2} \\
&= \frac{6x^2+18x-5x-15-3x^2+5x-2}{(x+3)^2} \\
&= \frac{3x^2+18x-17}{(x+3)^2}.
\end{aligned}$$

Remarque. On ne développe pratiquement jamais le carré au dénominateur ; nous verrons que cela à une utilité dans le paragraphe « Applications de la dérivation ».

Démonstration (du point 4 de la propriété)

Calculons le taux d'accroissement de la fonction uv en a :

$$\begin{aligned}
\tau_a(h) &= \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)v(a)-u(a)v(a)-u(a+h)v(a)+u(a+h)v(a+h)}{h}
\end{aligned}$$

(On a ici fait apparaître $u(a+h)v(a)$)

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left[u(a+h)-u(a)\right]v(a)+u(a+h)\left[v(a+h)-v(a)\right]}{h} \\
&= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a)+u(a+h)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a),\ \lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a) \text{ et } \lim_{h\to 0}u(a+h)=u(a).$$

Ainsi,

$$\lim_{h\to 0}\tau_a(h)=u'(a)v(a)+u(a)v'(a).$$

Donc $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

VII. Applications de la dérivation

VII. 1. Variation d'une fonction

Propriété 6

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur I $\iff$ $f'(x)>0$ pour tout x de I.
- f est strictement décroissante sur I $\iff$ $f'(x)<0$ pour tout x de I.

Conséquence : pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.

Exemple 13

Soit $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.
Sa dérivée est : $f'(x) = 9x^2 - 10x + 4$. C'est un polynôme de degré 2, dont le discriminant est :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 9 \times 4 = -44 < 0.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe du coefficient de x^2, c'est-à-dire ici positif.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

VII. 2. Extremum local

Définition 5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in$ I.
On dit que f admet un **extremum local** en a si $f'(a) = 0$ et si, pour $h \neq 0$, $f'(a-h)$ et $f'(a+h)$ n'ont pas le même signe.

Cet extremum local peut être :

- un **minimum** si $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{pour } x < a \\ f'(x) > 0 & \text{pour } x > a \end{cases}$;
- un **maximum** si $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{pour } x < a \\ f'(x) < 0 & \text{pour } x > a \end{cases}$.

Exemple 14

Considérons la fonction $f(x) = -2x^3 - 20x^2 + x + 2$.
Sa dérivée est : $f'(x) = -6x^2 - 40x + 1$, dont le discriminant est :

$$\Delta = (-40)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 1\,624 > 0.$$

$f'(x)$ admet donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-20 + \sqrt{406}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-20 - \sqrt{406}}{6}.$$

On déduit alors le tableau de variations suivant :

x	∞		$\frac{-20-\sqrt{406}}{6}$		$\frac{-20+\sqrt{406}}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$f(x_2)$	↗	$f(x_1)$	↘	

$f(x_2)$ est un minimum local.

$f(x_1)$ est un maximum local.

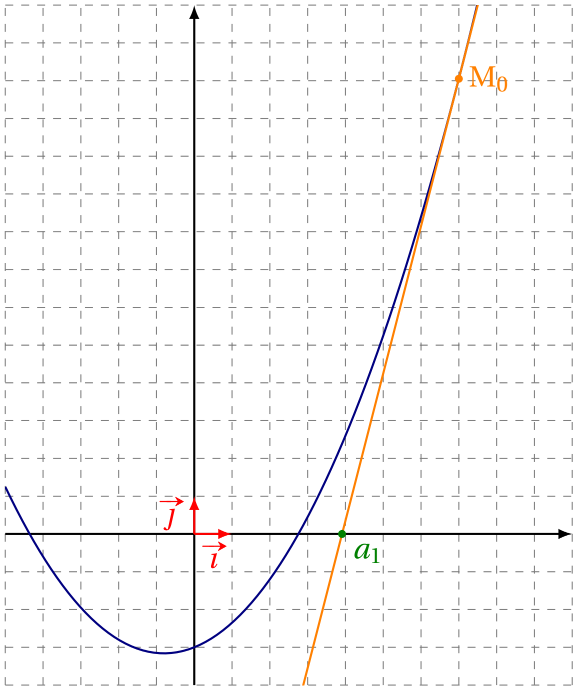
VII. 3. Méthode de Newton

La méthode de Newton est un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée d'une solution à une équation du type $f(x) = 0$.

Voyons à travers un exemple son principe. Considérons la fonction f définie par :

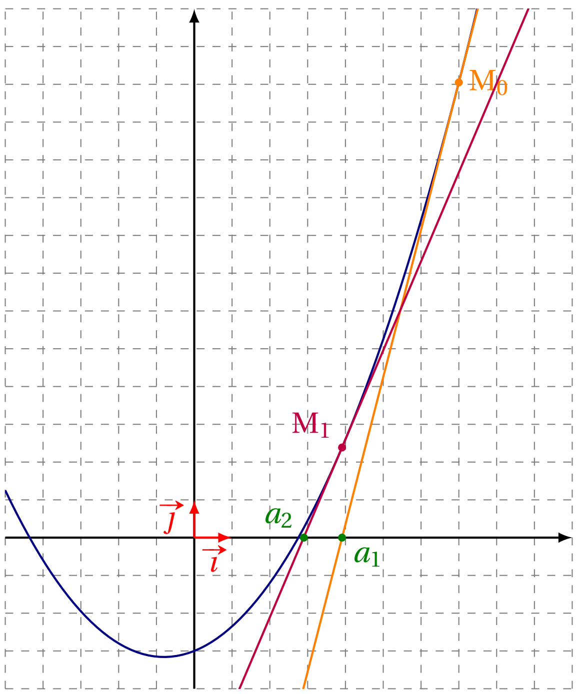
$$f(x) = 0,25x^2 + 0,4x - 3$$

dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



Prenons un point M_0 sur cette courbe dont l'abscisse x_0 est supérieure à 3, et traçons la tangente à la courbe en ce point : elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse a_1.

Maintenant, prenons le point M_1 de coordonnées $\left(a_1\,;f(a_1)\right)$, puis traçons la tangente à la courbe en M_1 : elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse a_2, comme l'illustre le schéma suivant.



On continue ainsi de façon analogue, et on peut remarquer que les nombres a_1, a_2, a_3, ... ainsi obtenus se rapprochent de l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
De plus, cela semble se rapprocher très vite; cela laisse à supposer que cette méthode est plutôt bonne pour trouver une valeur approchée de la solution positive à l'équation $f(x) = 0$...

Cette méthode, qui consiste à faire plusieurs fois la même chose mais pour avec des valeurs qui changent, nous pousse à écrire un algorithme calculant les valeurs successives a_0, a_1, ...
Mais avant cela, nous avons besoin de *formaliser* le problème.

VII. 3. a. Formalisation

Supposons connu la valeur de a_n ; alors $\mathrm{M}_{n+1}\left(a_n\,;f(a_n)\right)$.
L'équation de la tangente à la courbe au point M_{n+1} sera alors :

$$y = f'(a_n)(x - a_n) + f(a_n).$$

a_{n+1} est donc la solution de l'équation :

$$0 = f'(a_n)(x - a_n) + f(a_n).$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} 0 = f'(a_n)(a_{n+1} - a_n) + f(a_n) &\iff -f(a_n) = f'(a_n)(a_{n+1} - a_n) \\ &\iff -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_{n+1} - a_n \\ &\iff \boxed{a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}} \end{aligned}$$

VII. 3. b. Algorithme

Nous avons désormais une égalité qui permet de calculer a_{n+1} à partir de a_n ; nous pouvons donc écrire un algorithme qui calcule une série de valeurs à partir de la simple valeur de a_0 correspondant à l'abscisse du point M_0 :

```
a prend la valeur 7 (abscisse de M0)
Pour i allant de 1 à 10:
a prend la valeur a-f(a)/f'(a)
Fin du Pour
Afficher a
```

```python
def f(x):
    return 0.25*x*x+0.4*x-3

def g(x):
    return 0.5*x+0.4

a = 7
for i in range(10):
    a = a-f(a)/g(a)
print(a)
```

Programme Python

```
>>> 2.7552777669262354
```