CHAPITRE 2

Les nombres réels

Plan de ce chapitre

I. Nombres réels

I. 1. Des entiers naturels aux nombres réels

Définition 1

Symbole d'appartenance.
On considère un ensemble quelconque E.
On dit que x est un *élément* de E si x appartient à l'ensemble E. On note alors :

$$x \in \mathrm{E}.$$

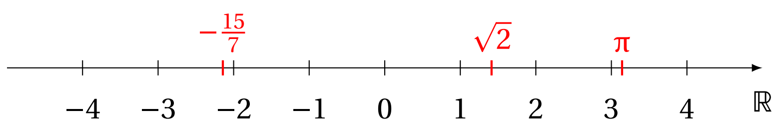
Définitions 2 (ensembles de nombres)

- L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble des nombres : 0, 1, 2, ...
  On le note $\mathbb{N}$:
  $$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;\dots\}$$
- L'ensemble des **entiers relatifs** est l'ensemble composé des entiers naturels et de leur opposés.
  On le note $\mathbb{Z}$:
  $$\mathbb{Z} = \{\dots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\dots\}$$
- L'ensemble des **nombres décimaux** est l'ensemble de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme $a \times 10^n$, où a et n sont deux entiers relatifs.
  On le note $\mathbb{D}$. C'est l'ensemble des nombres à virgule à écriture *finie*.
  $$\mathbb{D} = \{a \times 10^n \text{ , } a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\}$$
- L'ensemble des **nombres rationnels** est l'ensemble de tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$.
  On le note $\mathbb{Q}$:
  $$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$$
- L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble de tous les nombres pouvant représenter une quantité réelle.
  On le note $\mathbb{R}$.

I. 2. Représentations des ensembles

I. 2. a. La droite des réels

L'ensemble des nombres réels est représenté par une droite graduée sur laquelle on peut mettre n'importe quel nombre réel :



I. 2. b. Diagramme de Venn

Définition 3

Symbole d'inclusion.
Soient E et F deux ensembles quelconques. Si tous les éléments de F sont aussi dans E, on dit que F est **inclus** dans E, et on note :

$$\begin{cases} F \subset E & \text{si E est plus grand que F} \\ F \subseteq E & \text{si F peut être confondu avec E} \end{cases}$$

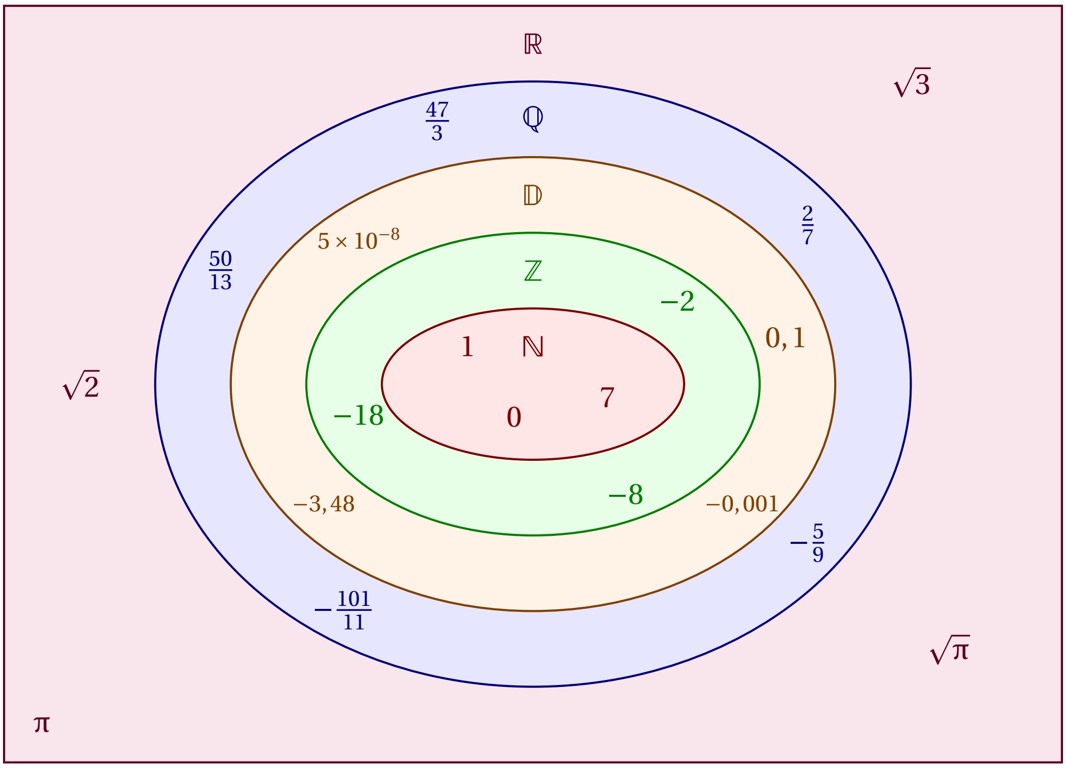
Propriété 1

- Tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs, donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Tous les entiers relatifs sont aussi des nombres décimaux, donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- Tous les nombres décimaux sont aussi des nombres rationnels, donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- Tous les nombres rationnels sont aussi des nombres réels, donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On a donc :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Cette dernière propriété se représente par le diagramme de Venn suivant :



Déf. 4

Si un nombre est réel mais n'est pas rationnel, on dit qu'il est **irrationnel**.

II. Intervalles

II. 1. Définitions & notations

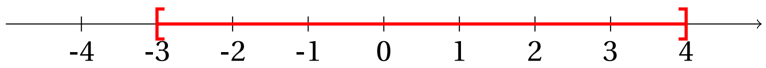
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Déf. 5

Intervalle fermé.
On notera $[a;b]$ l'ensemble des nombres réels compris entre a et b. Ici, a et b sont compris dans l'intervalle car les crochets sont dirigés vers l'intérieur.
On dira que $[a;b]$ est un **intervalle fermé**.

Exemple 1

On représentera $[-3;4]$ ainsi :

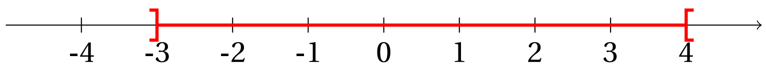


Déf. 6

Intervalle ouvert.
On notera $]a;b[$ l'ensemble des nombres compris entre a et b, avec a et b qui ne sont pas compris dans l'intervalle car les crochets sont dirigés vers l'extérieur.
On dira que $[a;b]$ est un **intervalle ouvert**

Exemple 2

On représentera $]-3;4[$ ainsi :

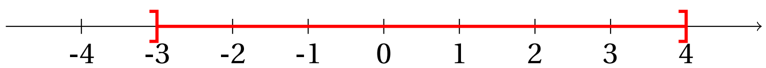


Déf. 7

Intervalle semi-ouvert à gauche.
On notera $]a;b]$ l'ensemble des nombres compris entre a et b, avec a non compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'extérieur du côté de a) et b compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'intérieur du côté de b).

Exemple 3

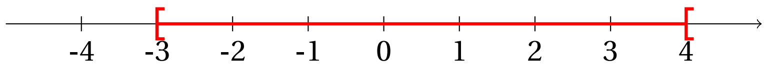
On représentera $]-3;4]$ ainsi :



Déf. 8 **Intervalle semi-ouvert à droite.**
On notera $[a;b[$ l'ensemble des nombres compris entre a et b, avec a compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'intérieur du côté de a) et b non compris dans l'intervalle (car le crochet est dirigé vers l'extérieur du côté de b).

Exemple 4

On représentera $[-3;4[$ ainsi :



Définition 9 **Intervalle infini.**

- On notera $]-\infty;a[$ l'ensemble des nombres strictement plus petits que a.
- On notera $]-\infty;a]$ l'ensemble des nombres plus petits que a ou égaux à a.
- On notera $]a;+\infty[$ l'ensemble des nombres strictement plus grands que a.
- On notera $[a;+\infty[$ l'ensemble des nombres plus grands que a ou égaux à a.

Remarque. Le crochet est toujours *ouvert* du côté de l'infini (car on ne peut jamais atteindre l'infini).

II. 2. Appartenance à un intervalle

Pour écrire qu'un nombre x appartient à un intervalle $[a;b]$, on écrira :

$$x \in [a;b].$$

Cela signifie que x est compris entre a et b et on pourra donc l'écrire aussi :

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Attention

Les signes d'inégalité sont choisis en fonction du sens des crochets de l'intervalle :

$$x \in [a;b] \Longrightarrow a \leqslant x \leqslant b$$

$$x \in]a;b[\Longrightarrow a < x < b$$

$$x \in]a;b] \Longrightarrow a < x \leqslant b$$

$$x \in [a;b[\Longrightarrow a \leqslant x < b$$

$$x \in [a;+\infty[\Longrightarrow x \geqslant a$$

$$x \in]-\infty;a[\Longrightarrow x < a$$

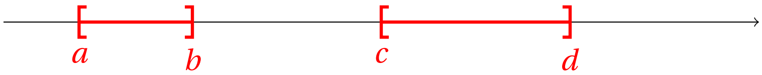
Pour écrire qu'un nombre x n'appartient pas à un intervalle $[a;b]$, on écrira : $x \notin [a;b]$.

II. 3. Union et intersection d'intervalles

- Pour écrire qu'un nombre x appartient à un intervalle $[a;b]$ **ou** à un intervalle $[c;d]$, on écrira :

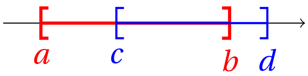
$$x \in [a;b] \cup [c;d].$$

On représentera l'union ainsi :



Attention

Si les deux intervalles se chevauchent,



devient :

Dans ce cas (et uniquement dans ce cas), $[a;b] \cup [c;d] = [a;d]$.

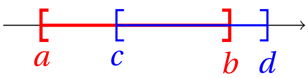
- Pour écrire qu'un nombre x appartient à un intervalle $[a;b]$ **et** à un intervalle $[c;d]$, on écrira :

$$x \in [a;b] \cap [c;d].$$

  - Si les deux intervalles ne se chevauchent pas, l'intersection est vide (n'existe pas). On notera alors :

$$[a;b] \cap [c;d] = \varnothing.$$

  - Si les deux intervalles se chevauchent, l'intersection est l'ensemble en commun aux deux intervalles :



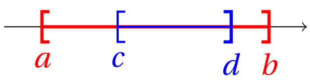
intersecion :

II. 4. Inclusion d'intervalles

Si un intervalle $[c;d]$ est inclus dans un autre intervalle $[a;b]$, on écrira :

$$[c;d] \subset [a;b].$$

Cela se schématise de la façon suivante :



II. 5. Notations particulières

L'ensemble des nombres réels auquel on enlève le nombre 0 est noté : $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
L'ensemble des nombres réels auquel on enlève le nombre a est noté : $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
De plus, on notera :

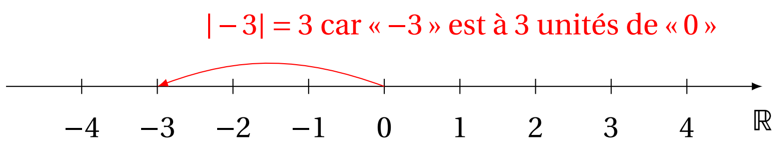
$$]-\infty;0] = \mathbb{R}_- \quad ; \quad]-\infty;0[= \mathbb{R}_-^* \quad ; \quad [0;+\infty[= \mathbb{R}_+ \quad ; \quad]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*.$$

III. Valeur absolue d'un nombre réel

III. 1. Définition

Déf. 10 Soit a un nombre réel. On appelle **valeur absolue** de a la distance qui sépare a de 0 sur la droite des réels.
On la note $|a|$.

Exemple 5



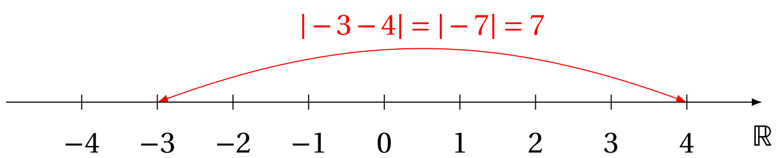
Remarque. On a donc : $\begin{cases} |a| = a & \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| = -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$.

III. 2. Distance entre deux nombres réels

Propriété 2

Soient a et b deux nombres réels.
La distance entre a et b est égale à $|a-b|$ (ou $|b-a|$, ce qui est la même chose).

Exemple 6



-3 et 4 sont distants de 7 unités car $|-3-4| = |-7| = 7$.

III. 3. Résolution de l'équation $|x-a| \leqslant r$

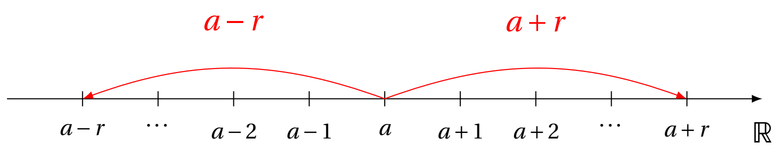
Propriété 3

Soient a et r deux nombres réels, avec $r > 0$.

$$|x-a| \leqslant r \iff x \in [a-r\,;a+r].$$

$$|x-a| < r \iff x \in \,]a-r\,;a+r[.$$

En effet, dire que $|x-a| \leqslant r$ signifie que la distance entre x et a est inférieure ou égale à r :



Exemple 7

$$\begin{aligned} |x+5| \leqslant 3 &\iff |x-(-5)| \leqslant 3 \\ &\iff x \in [-5-3\,;-5+3] \\ &\iff x \in [-8\,;-2]. \end{aligned}$$

III. 4. Encadrement décimal

Déf. 11

Soient x un nombre réel et n un entier naturel.
Trouver un encadrement décimal de x à 10^{-n} près signifie trouver un intervalle $[a\,;b]$ tel que $|x-a| \leqslant 10^{-n}$ et $|x-b| \leqslant 10^{-n}$.

Exemples 8

1. Un encadrement de π à 10^{-2} près est :

$$3,14 \leqslant \pi \leqslant 3,15$$

car $|\pi - 3,14| \approx 0,0016 \leqslant 10^{-2}$ et $|\pi - 3,15| \approx 0,008 \leqslant 10^{-2}$.

2. Un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près est :

$$1,414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,415$$

car $|\sqrt{2} - 1,414| \approx 0,0002 \leqslant 10^{-3}$ et $|\sqrt{2} - 1,415| \approx 0,0008 \leqslant 10^{-3}$.

Remarque. Trouver un encadrement décimal à 10^{-n} près de la forme $[a\,;b]$ revient à écrire a et b sous la forme décimale avec n chiffres après la virgule.

À retenir

Quand on connaît une valeur approchée de x, pour obtenir un encadrement décimal à 10^{-n} près,

- a est la troncature de la partie décimale de x avec n chiffres après la virgule;
- b est obtenu à partir de a en ajoutant « 1 » au dernier chiffre de la partie décimale.

Par exemple, pour $\pi \approx 3,14159\ldots$, pour un encadrement à 10^{-3}, on prend 3 chiffres après la virgule pour obtenir a ($a = 3,141$) et on ajoute 1 au dernier chiffre de la partie décimale de a pour obtenir b ($141 + 1 = 142$ donc $b = 3,142$). On obtient alors :

$$3,141 \leqslant \pi \leqslant 3,142.$$

IV. Racines carrées

IV. 1. Définition

Déf. 12

Soit x un nombre réel positif ou nul.
On dit que y est la **racine carrée** de x, et on écrit $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$, si $y^2 = x$ et $y \geqslant 0$.

Exemples 9

1. 3 est la racine carrée de 9 car $3^2 = 9$: $\sqrt{9} = 3$.
2. 10 est la racine carrée de 100 car $10^2 = 100$: $\sqrt{100} = 10$.

Remarque. $(-3)^2 = 9$ mais -3 n'est pas la racine carrée de 9 car la définition dit bien que la racine carrée d'un nombre est positive ou nulle ($y \geqslant 0$).

Propriété 4

Quel que soit le nombre réel a,

$$\sqrt{a^2} = |\,a\,|.$$

Exemples 10

1. $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.
2. $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$.
3. $\sqrt{7^2} = |7| = 7$.

IV. 2. Règles de calculs

Propriété 5

Quels que soient les nombres réels a et b positifs ou nuls,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Démonstration

Nous avons d'une part :

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab\,;$$

d'autre part,

$$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b = ab.$$

Or, $\sqrt{ab} \geqslant 0$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \geqslant 0$ $^{(*)}$, donc :

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 \iff \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Remarque. Il fallait ici préciser les conditions (*) car dans un cas général, ce n'est pas parce que l'on a $x^2 = y^2$ que $x = y$.
Par exemple, $(-3)^2 = 3^2$. Les conditions de positivité sont donc ici nécessaires car si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors on peut dire que $x^2 = y^2$ implique que $x = y$.
Nous en dirons plus sur cela dans le chapitre qui traitera de la fonction carré.

Exemples 11

1. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Propriété 6

Quels que soient les nombres réels a et b positifs, avec $b \neq 0$,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Démonstration

On a d'une part : $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$; d'autre part, $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \dfrac{a}{b}$.

Or, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} \geqslant 0$ et $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$ donc $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemples 12

1. $\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \dfrac{5}{3}$.
2. $\sqrt{\dfrac{16}{36}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Attention

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de calculer par exemple :

$$\begin{cases} \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ \sqrt{1} + \sqrt{4} = 1+2 = 3. \end{cases}$$

On voit alors que les deux résultats ne sont pas égaux.

Remarque. Le symbole du radical (c'est-à-dire le symbole « $\sqrt{}$ » est dû au mathématicien allemand Christoff Rudolff (1499 - 1545).
Dans l'écriture $\sqrt{a}$, « a » est appelé le *radicande*.

À retenir (simplifier un radical par décomposition en produit de facteurs premiers)

Pour simplifier $\sqrt{17\,146\,080}$ (par exemple), on peut avant tout décomposer le radicande en produit de facteurs premiers :

- 17 146 080 est divisible par 2 donc on commence par diviser par 2 :

$$\begin{array}{l|l} 1\ 7\ 1\ 4\ 6\ 0\ 8\ 0 & 2 \\ \cline{2-2} \ 1\ 1 & 8\ 5\ 7\ 3\ 0\ 4\ 0 \\ \ 1\ 4 & \\ \ 0\ 6 & \\ \ 0\ 0\ 8 & \\ \ 0 & \end{array}$$

- Le quotient obtenu est encore divisible par 2 donc on continue :

$$\begin{array}{l|l} 8\ 5\ 7\ 3\ 0\ 4\ 0 & 2 \\ \cline{2-2} 0\ 5 & 4\ 2\ 8\ 6\ 5\ 2\ 0 \\ \ 1\ 7 & \\ \ 1\ 3 & \\ \ 1\ 0 & \\ \ 0\ 4 & \\ \ 0 & \end{array}$$

À retenir (suite)

- Le quotient est encore divisible par 2 donc on continue jusqu'à obtenir un quotient impair. On obtient alors :
$$17\,146\,080 = 2^5 \times 535\,815.$$
- 535 815 est divisible par 3 (car la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3) donc on divise par 3 :

$$\begin{array}{l|l}
5\ 3\ 5\ 8\ 1\ 5 & 3 \\ \cline{2-2}
2\ 3 & 1\ 7\ 8\ 6\ 0\ 5 \\
2\ 5 & \\
1\ 8 & \\
0\ 1\ 5 & \\
0 &
\end{array}$$

- Le quotient obtenu est encore divisible par 3 donc on continue jusqu'à obtenir un quotient non multiple de 3. On obtient alors :
$$535\,815 = 3^7 \times 245.$$
- On passe au nombre premier qui suit 3 : c'est 5. 245 est divisible par 5, et :
$$245 = 5 \times 49 = 5 \times 7^2.$$
- Finalement, le radicande s'écrit :
$$17\,146\,080 = 2^5 \times 3^7 \times 5 \times 7^2.$$
Comme nous souhaitons simplifier une racine carrée, seuls les exposants pairs nous intéressent ; on écrit donc :
$$17\,146\,080 = 2^4 \times 2 \times 3^6 \times 3 \times 5 \times 7^2.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}
\sqrt{17\,146\,080} &= \sqrt{2^4} \times \sqrt{3^6} \times \sqrt{7^2} \times \sqrt{2 \times 3 \times 5} \\
&= 2^2 \times 3^3 \times 7^1 \times \sqrt{30} \\
&= \underline{756\sqrt{30}}.
\end{aligned}$$

V. Raisonnement par l'absurde

Déf. 13 Un **raisonnement par l'absurde** est un raisonnement dans lequel on part d'une donnée contraire à ce que l'on veut démontrer afin d'arriver à une contradiction mathématique.

V. 1. $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

On considère la propriété :

$$(\mathrm{P}) \quad : \quad \text{« } \frac{1}{3} \text{ n'est pas décimal ».}$$

- **Étape 1 : on suppose que le contraire de (P) est vraie.**

  On suppose alors que $\frac{1}{3}$ est décimal.

- **Étape 2 : on exploite cette supposition pour arriver à une absurdité.**

  Si $\frac{1}{3}$ est décimal alors, par définition d'un nombre décimal,

  $$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}, \quad \text{où } a \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$$

  car $0 < \frac{1}{3} < 1$.

  Ainsi, les produits en croix sont égaux :

  $$1 \times 10^n = 3 \times a \qquad \text{soit} \qquad 10^n = 3a.$$

  Ce qui signifie que 10^n est un multiple de 3, ce qui n'est pas le cas car un nombre est multiple de 3 uniquement si la somme de ses chiffres est elle-même un multiple de 3.

  Or, $10^n = 1000\ldots$ donc la somme des chiffres de $10^n = 1$, qui n'est pas un multiple de 3.

- **Étape 3 : conclusion.**

  Supposer que $\frac{1}{3}$ est un décimal implique que 10^n est un multiple de 3, ce qui est absurde.

  Par conséquent, $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

V. 2. $\sqrt{2}$ est irrationnel

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, il existe deux nombres p et q premiers entre eux tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Ainsi, en élevant au carré, on a :

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \qquad \text{soit} \qquad 2 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Donc,

$$p^2 = 2q^2.$$

p^2 est donc un nombre pair, ce qui signifie que p est aussi un nombre pair (en effet, si p était impair, en l'élevant au carré, on obtiendrait encore un nombre impair).
Donc :

$$p = 2k.$$

Alors,

$$(2k)^2 = 2q^2 \qquad \text{soit} \qquad 4k^2 = 2q^2.$$

En divisant par 2 à droite et à gauche du signe « = », on obtient :

$$2k^2 = q^2.$$

Cela signifie que q^2 est pair, et donc que q est aussi pair.

On arrive alors au fait que p et q sont tous les deux pairs, ce qui est impossible car on a supposé que p et q étaient premiers entre eux.

Ainsi, $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$; $\sqrt{2}$ n'est donc pas rationnel.