CHAPITRE 3

Calcul littéral

Plan de ce chapitre

I. Puissances à exposants relatifs

I. 1. Définition

Déf. 1 Soient x un nombre réel.
On appelle communément **puissance de x** tout nombre s'écrivant sous la forme x^n, où n est un entier relatif.

Remarque. En réalité, on devrait définir tout nombre s'écrivant x^n comme une puissance *d'exposant entier*, mais c'est un peu long, on préfère raccourcir en *puissance de* x.

Exemples 1

1. 1 024 est une puissance de 2 car $1\,024 = 2^{10}$.
2. $\dfrac{1}{27}$ est une puissance de 3 car $\dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{3^3} = 3^{-3}$.

I. 2. Propriétés algébriques

Propriété 1

Soient a et b deux nombres réels. Soient m et n deux entiers relatifs. Alors :

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $\left(a^n\right)^m = a^{n\times m}$
4. $(ab)^n = a^n \times b^n$

Exemples 2

1. $5^3 \times 5^{-7} = 5^{3-7} = 5^{-4} = \dfrac{1}{5^4}$.
2. $\dfrac{7^8}{7^5} = 7^{8-5} = 7^3$.
3. $\left(2^7\right)^3 = 2^{7\times 3} = 2^{21}$.
4. $15^3 = (3 \times 5)^3 = 3^3 \times 5^3$.

II. Identités remarquables

Propriété 2 (identités remarquables)

Pour tous nombres réels a et b,

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Remarque. Ces égalités sont à connaître par cœur dans un sens comme dans l'autre.

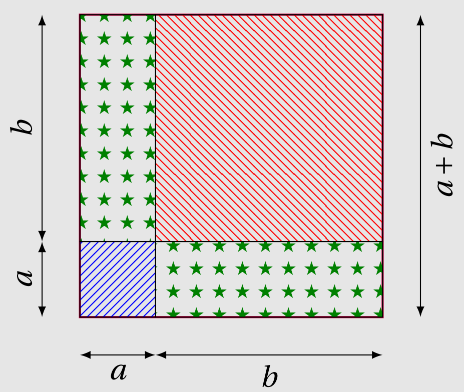
Exemples 3 (développements)

1. $(3x+4)^2 = (3x)^2 + 2 \times 4 \times 3x + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$.
2. $(5-3x)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3x + (3x)^2 = 25 - 30x - 9x^2$.
3. $(8x-7)(8x+7) = (8x)^2 - 7^2 = 64x^2 - 49$.

Exemples 4 (factorisations)

1. $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \times 1 \times 2x + 1^2 = (2x+1)^2$.
2. $100 - 80x + 16x^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times 4x + (4x)^2 = (10-4x)^2$.
3. $49x^2 - 25 = (7x)^2 - 5^5 = (7x-5)(7x+5)$.

Démonstration ($(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)



Le grand carré blue a pour dimension $a+b$; son aire est donc égale à $(a+b)^2$.

Ce grand carré est constitué de deux carrés de côtés a et b, donc d'aires a^2 et b^2, ainsi que de deux rectangles identiques de dimensions $a \times b$, donc d'aire ab.

L'aire totale est donc égale à : $a^2 + b^2 + 2ab$.
Les deux expressions $(a+b)^2$ et $a^2 + b^b + 2ab$ représentant la même aire, elle sont nécessairement égales.

III. Expressions fractionnaires

Propriété 3

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs non nuls. Alors,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Exemple 5

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x+8}-\frac{3x+1}{2x-7} &= \frac{2(2x-7)-(3x+1)(x+8)}{(x+8)(2x-7)}\\
&= \frac{4x-14-(3x^2+24x+x+8)}{(x+8)(2x-7)}\\
&= \frac{4x-14-3x^2-24x-x-8}{2x^2-7x+16x-56}\\
&= \frac{-3x^2-21x-22}{2x^2+9x-56}.
\end{aligned}$$

IV. Propriétés sur les inégalités

IV. 1. Conservation de l'ordre par addition

Propriété 4

Soient a, b et k trois nombres réels.

$$a<b \iff a+k<b+k.$$

On peut se servir de cette propriété pour résoudre des inéquations.

Exemple 6

$$\begin{aligned}
x+3<2x-8 &\iff x+3{\color{red}-x}<2x-8{\color{red}-x}\\
&\iff 3<x-8\\
&\iff 3{\color{blue}+8}<x-8{\color{blue}+8}\\
&\iff 11<x
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de toutes les valeurs de x telles que $x+3<2x-8$ est donc l'ensemble des valeurs de x qui sont strictement plus grandes que 11.
On note en général cet ensemble S :

$$\mathrm{S}=]11\,;+\infty[.$$

IV. 2. Produit d'une inégalité par un réel

Propriété 5

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

- Si $k > 0$ alors $ka < kb$ et $\dfrac{a}{k} < \dfrac{b}{k}$.
- Si $k > 0$ alors $ka > kb$ et $\dfrac{a}{k} > \dfrac{b}{k}$.

Exemples 7

1. $2x > 6 \iff \dfrac{2x}{2} > \dfrac{6}{2}$ (on n'inverse pas le signe car on divise par un positif)
   $\iff x > 3.$
2. $-5x > 15 \iff \dfrac{-5x}{-5} < \dfrac{15}{-5}$ (on inverse le signe car on divise par un négatif)
   $\iff x < -3.$

Remarque. Autrement dit, on change l'inégalité quand on la multiplie ou divise par un nombre négatif.

IV. 3. Somme de deux inégalités

Propriété 6

Soient a, b, m et n quatre nombres réels.

$$\text{si } a < b \text{ et } m < n \quad \text{alors} \quad a + m < b + n.$$

Exemple 8

On sait que $x + 5 < 12$ et que $2x - 1 < 4$ donc :

$$(x+5) + (2x-1) < 12 + 4$$

et donc :

$$3x + 4 < 16 \qquad \text{soit} \qquad 3x < 12 \quad \text{donc} \quad x < 4.$$

Attention

La réciproque n'est pas nécessairement vraie : si $a + m < b + n$ alors on n'a pas toujours $a < b$ et $m < n$.
De plus, la propriété n'est plus vraie si on soustrait.

IV. 4. Inégalités avec racines carrées

Propriété 7

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Alors,

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Démonstration

On a d'une part $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a+b$ et d'autre part $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b > a+b$, donc :

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 > \left(\sqrt{a+b}\right)^2$$

et comme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$ sont deux nombres positifs, cela signifie que :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}.$$

(on a déjà vu que si $x > 0$, $y > 0$ et $x^2 > y^2$ alors $x > y$)