CHAPITRE

4 Généralités sur les fonctions

Plan de ce chapitre

I. Définition

I. 1. Introduction

On considère le programme de calcul suivant :

• Choisir un nombre • l'élever au carré • soustraire 7

Si on note x le nombre choisi au départ, ce programme donne à la fin le nombre $x^2 - 7$.
Si on décide de noter $r(x)$ le **r**ésultat (dépendant du nombre de départ x) alors :

$$r(x) = x^2 - 7.$$

Si on avait noté a le nombre de départ et $f(a)$ le nombre **f**inal obtenu (dépendant de a), alors on aurait noté :

$$f(a) = a^2 - 7.$$

Ce qui compte est l'expression qui permet d'obtenir le nombre final *en fonction* du nombre de départ.

On dit qu'à tout nombre réel x, ce programme **associe** le nombre $x^2 - 7$, et on note :

$$x \longmapsto x^2 - 7.$$

Il y a donc deux notations pour désigner le fait qu'un nombre est transformé en un autre.

Cette transformation est appelée une **fonction**.

I. 2. Définition mathématique

Définitions 1

Soit x un nombre réel.
On appelle **fonction** toute opération sur x qui le transforme en un autre nombre.

Si on note f cette fonction alors le nombre final est noté $f(x)$.
x est appelé **un antécédent** de $f(x)$.
$f(x)$ est appelé **l'image** de x par la fonction f.
On note alors :

$$f\ :\ x \longmapsto f(x)$$

II. Ensemble de définition & ensemble image

II. 1. Ensemble de définition

Déf. 2

Soit f une fonction.
L'**ensemble de définition** de f (aussi appelé **domaine de définition**) est l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.
On le note en général $\mathscr{D}_f$.

Exemples 1

1. Si $f : x \longmapsto x^2 - 7$ alors $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ car on peut calculer $x^2 - 7$ pour toutes les valeurs réelles de x.
2. Si $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ alors $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car on peut toujours calculer $\dfrac{1}{x-1}$ sauf si $x = 1$ (car il est impossible de diviser par 0)

II. 2. Ensemble image

Déf. 3

Soit f une fonction dont le domaine de définition est $\mathscr{D}_f$.
On appelle **ensemble image** de f l'ensemble de toutes les valeurs que prend $f(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Exemple 2

Soit $f : x \longmapsto x^2 - 7$. On sait que pour tout x réel, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 - 7 \geqslant -7$.
De plus, x pouvant prendre des valeurs de plus en plus grandes, x^2 peut aussi prendre des valeurs de plus en plus grandes, donc il n'y a pas de limite supérieure à x^2, donc à $x^2 - 7$ (on dit que $x^2 - 7$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.
Ainsi, l'ensemble image de f est $[-7\,;+\infty[$.

Remarque. Trouver l'ensemble image d'une fonction n'est pas immédiat. Il sera très souvent nécessaire d'étudier la fonction. C'est l'objet du reste de ce chapitre.

III. Représentation graphique

III. 1. Tableau de valeurs

Définition 4

On considère une fonction f définie sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$ de $\mathbb{R}$.
On appelle **tableau de valeurs** de f un tableau constitué de deux lignes :

- sur la 1re, sont reportées plusieurs valeurs de x comprises entre a et b ;
- sur la 2e, sont reportées les images des valeurs de x de la 1re ligne.

Remarque. Le **pas** des valeurs de x, c'est-à-dire la différence entre chaque valeur de x, est arbitraire : c'est nous qui le choisissons selon le contexte dans lequel nous sommes.

Exemple 3

Soit $f : x \longmapsto x^2 - 7$. Un tableau de valeurs de f sur $[-5\,;5]$ est :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	18	9	2	-3	-6	-7	-6	-3	2	9	18

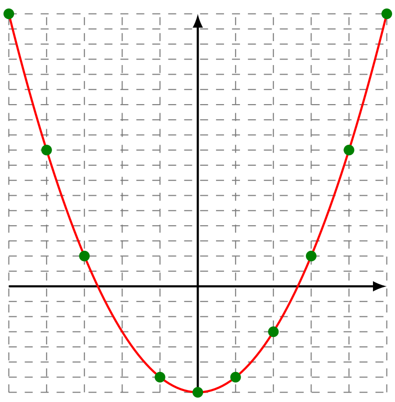
Ici, j'ai pris la décision (ça n'a pas été simple, mais j'y suis tout de même arrivé...) de prendre un pas égal à 1 pour les valeurs de x, c'est-à-dire que je suis parti de la plus petite valeur de x permise (donc $x = -5$ car la fonction est définie sur $[-5\,;5]$) et j'ai avancé en ajoutant 1 à chaque fois, jusqu'à arriver à la plus grande valeur de x permise, donc jusqu'à $x = 5$.
Pour chaque valeur de x, j'ai calculé $f(x)$ (donc $f(-5)$, $f(-4)$, $f(-3)$, ... jusqu'à $f(5)$).

III. 2. Courbe représentative

Déf. 5

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$.
On appelle **courbe représentative** de f dans un repère cartésien l'ensemble de tous les points de coordonnées $\big(x\,;f(x)\big)$, pour $x \in \mathscr{D}_f$.

Exemple 4



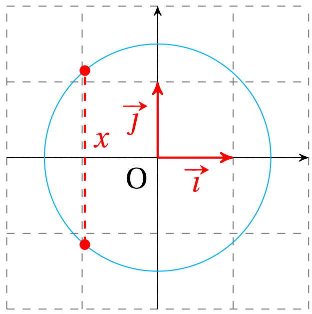
On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$.
Pour tracer cette courbe, on s'aide du tableau de valeurs établi précédemment en mettant dans le repère les points de coordonnées $(-5\,;18)$, $(-4\,;9)$, ..., $(5\,;18)$.

On les relie ensuite de sorte à ce que la courbe finale ne soit pas trop rectiligne.

Remarque. La définition de la courbe représentative d'une fonction est très importante. En effet, elle nous permet de savoir l'ordonnée d'un de ses points si on en connaît l'abscisse.
Par exemple, sur la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$, on sait que le point de la courbe représentative de f d'abscisse $x = 2,5$ a pour ordonnée $y = f(2,5) = 2,5^2 - 7 = -0,75$.

Attention

La courbe représentative d'une fonction ne « retourne pas en arrière » ; autrement dit, pour un x donné, il n'y a qu'un seul point sur la courbe dont l'abscisse vaut x. Par exemple, le cercle suivant n'est pas la courbe représentative d'une fonction car pour l'abscisse x indiquée, il y a deux points sur le cercle dont l'abscisse est x :

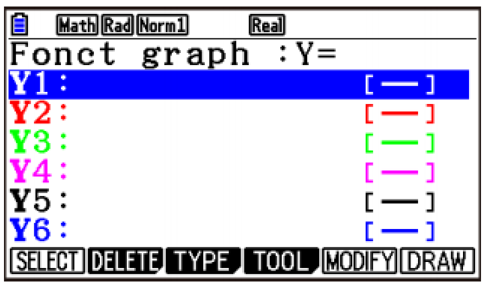


III. 3. Ce que fait votre calculatrice

Les captures d'écran ci-dessous sont issues du manuel d'utilisation de la CASIO GRAPH90+.

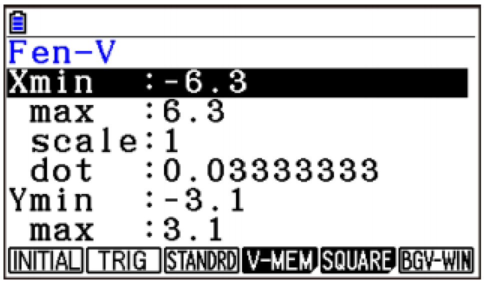
Pour tracer une courbe sur une calculatrice,

1. il faut avant tout entrer l'expression de la fonction en accédant à un écran ressemblant à celui-ci :



(Exemple : mode **Graphe**)

2. il faut ensuite entrer les paramètres d'affichage en accédant à une fenêtre comme celle-ci :



Ici, `Xmin` représente la plus petite valeur de x du domaine de définition sur lequel on souhaite tracer la courbe. Quant à `Xmax`, cela représente la plus grande valeur de x. Ainsi, pour une fonction définie sur $[-5;5]$, on entrera `Xmin=-5` et `Xmax=5`.

Il va de soit que `Ymin` et `Ymax` jouent le même rôle, mais pour les valeurs des images. Sur l'exemple précédent, d'après le tableau de valeurs, on pourra prendre `Ymin=-7` et `Ymax=18`.

Le paramètre `scale` représente l'échelle des graduations.

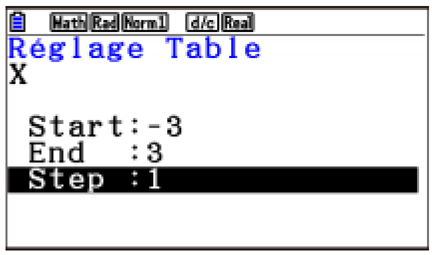
Sur la TI89, un paramètre `xres` est présent : pour un tracé très précis, ce paramètre doit valoir 1. Pour un tracé rapide mais moins précis, on peut entrer une valeur de 2 à 10 (si « 10 » est entré, cela sous-entend que la calculatrice prendra 1 pixel sur 10, calculera son image, et tracera une segment de cette image à la suivante).

Votre calculatrice peut aussi construire un tableau de valeurs.
Par exemple, sur la CASIO GRAPH90+, après avoir entrée l'expression de la fonction, on devra définir les paramètres du tableau de valeurs :

MENU Table

F5 (SET)

(−) 3 EXE 3 EXE 1 EXE

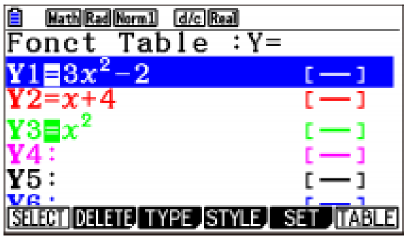


Ici, le paramètre `step` informe le *pas* entre chaque valeurs de x (sur cet exemple, `step=1` stipule que les valeurs de x vont être : -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3).

Voici ci-dessous un extrait du manuel d'utilisation de la CASIO GRAPH90+ permettant de voir comment générer un tableau de valeurs pour trois fonctions ($x \mapsto 3x^2 - 2$, $x \mapsto x + 4$ et $x \mapsto x^2$).

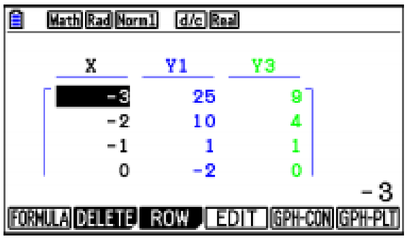
Utilisez ⏶ et ⏷ pour mettre en surbrillance la fonction que vous voulez sélectionner pour générer le tableau et appuyez sur F1 (SELECT) pour la sélectionner.

Le signe « = » des fonctions sélectionnées est en surbrillance à l'écran. Pour désélectionner une fonction, amenez le curseur sur celle-ci et appuyez une nouvelle fois sur F1 (SELECT).



Appuyez sur F6 (TABLE) pour générer un tableau de chiffres à partir des fonctions sélectionnées. La valeur de la variable x change en fonction de la plage ou du contenu de la liste que vous avez spécifiée.

L'exemple ci-contre montre les résultats obtenus pour la liste 6 (−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3).



Chaque cellule peut contenir jusqu'à six chiffres, signe négatif compris.

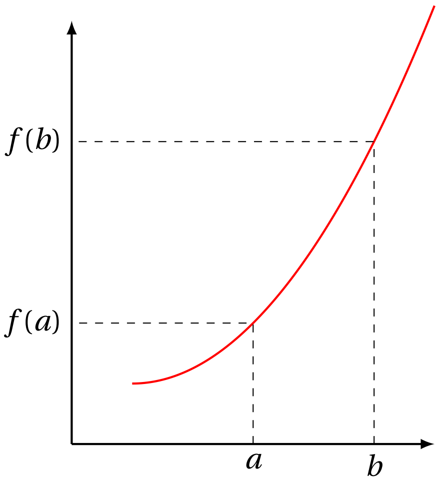
IV. Variations d'une fonction

IV. 1. Sens de variation

Définitions 6

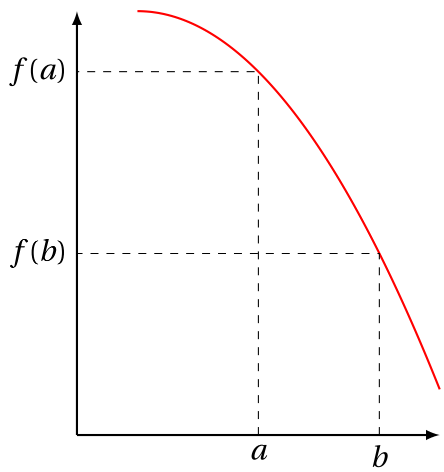
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère deux nombres a et b quelconques dans I tels que $a < b$.

- On dit que f est **strictement croissante sur I** si $f(a) < f(b)$.
- On dit que f est **strictement décroissante sur I** si $f(a) > f(b)$.
- On dit que f est **constante sur I** si $f(a) = f(b)$.



$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

f est strictement croissante

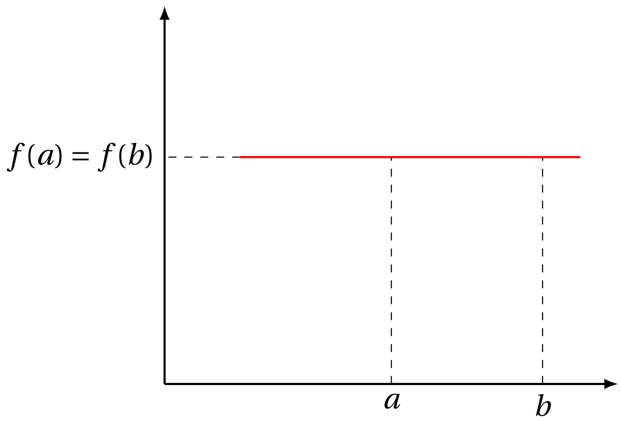


$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

f est strictement décroissante

Remarques.

- Si f est strictement croissante sur un intervalle I alors les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents.
- Si f est strictement décroissante sur un intervalle I alors les images sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents.
- Une fonction constante sur un intervalle I sera représentée par une droite (ou segment si l'intervalle est fini) horizontal.e. :



IV. 2. Tableau de variations

Définition 7

Soit f une fonction définie sur un domaine de définition $\mathscr{D}_f$.
Le **tableau de variations** de f sur $\mathscr{D}_f$ est un tableau comportant deux lignes :

- sur la 1$^{\text{re}}$ sont reportées toutes les valeurs de x importantes (bornes du domaine de définition, valeurs interdites de la fonction, valeurs de x où la fonction change de sens de variation) ;
- sur la 2$^{\text{e}}$ sont représentées les variations de f (une flèche montante quand f est croissante, une flèche descendante quand f est décroissante), ainsi éventuellement que la donnée de certaines images.

Exemple 5

D'après la courbe représentative de la fonction $f\ :\ x \mapsto x^2 - 7$ donnée dans l'exemple 4, ainsi que du tableau de valeurs de cette fonction, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	-5		0		5
Variations de $f(x)$	18	↘	-7	↗	18

IV. 3. Minimum et maximum

Déf. 8

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On appelle **minimum** de f sur I la plus petite valeur atteinte par $f(x)$ pour $x \in$ I.
- On appelle **maximum** de f sur I la plus grande valeur atteinte par $f(x)$ pour $x \in$ I.

Exemple 6

D'après le tableau de variations précédent,

- le minimum de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$ sur $[-5;5]$ est -7;
- le maximum de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$ sur $[-5;5]$ est 18.

V. Fonctions paires, fonctions impaires

V. 1. Fonctions paires

Définition 9

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.
On dit que f est **paire** si :

- $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f$;
- $f(-x) = f(x)$.

Exemple 7

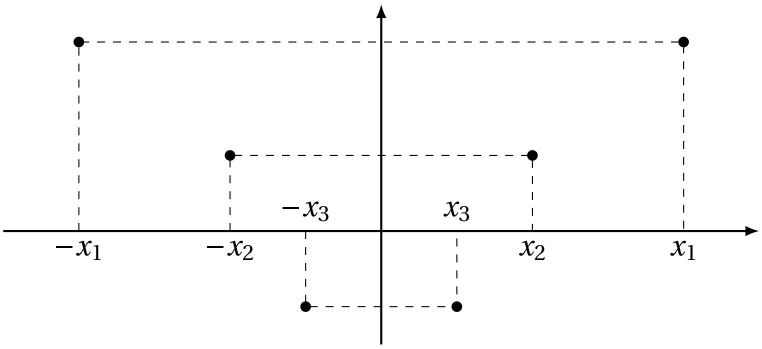
La fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$ est paire car son domaine de définition est $\mathbb{R}$ (donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$) et :

$$f(-x) = (-x)^2 - 7 = x^2 - 7 = f(x).$$

Propriété 1

Si une fonction f est paire alors, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

En effet, on a la situation suivante :



f est paire donc $f(x_1) = f(-x_1)$, $f(x_2) = f(-x_2)$, $f(x_3) = f(-x_3)$, etc.
Les points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

V. 2. Fonctions impaires

Déf. 10

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.
On dit que f est **impaire** si :

- $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f$;
- $f(-x) = -f(x)$.

Exemple 8

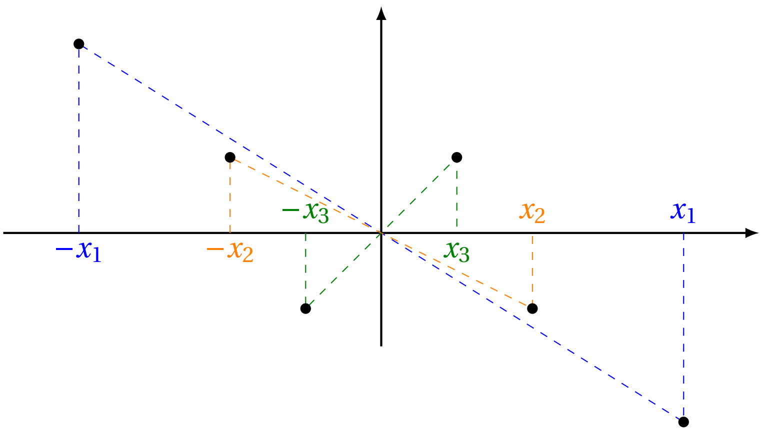
La fonction $f\ :\ x \mapsto x^3 + x$ est impaire car son domaine de définition est $\mathbb{R}$ (donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$) et :

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x).$$

Propriété 2

Si une fonction f est impaire alors, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

En effet, on a la situation suivante :



f est impaire donc $f(x_1) = -f(x_1)$, $f(x_2) = -f(x_2)$, $f(x_3) = -f(x_3)$, etc.
Les points sont symétriques par rapport à l'origine du repère.