CHAPITRE 4

La fonction exponentielle

Plan de ce chapitre

I. Première approche

I. 1. Notre objectif

On recherche une fonction f telle que,

1. pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$;
2. $f(0) = 1$.

On suppose que cette fonction existe.

Très vite, on se rend compte que cette fonction n'est pas un polynôme (car le seul polynôme P qui vérifie le point 1 est $\mathrm{P}(x) = 0$ et dans ce cas, $\mathrm{P}(0) \neq 1$, ce qui ne satisfait pas le point 2. Ce n'est pas non plus une fonction racine carrée ou une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes).

I. 2. La méthode d'Euler

Nous allons avant tout tenter de dessiner la courbe représentative de notre fonction. Pour cela, on va prendre des intervalles $[a\,;a+h]$, avec h très proche de 0, et on va assimiler la courbe représentative de f à s tangente au point d'abscisse a. En effet, sur un intervalle assez petit $[a\,;a+h]$, la tangente est très proche de la courbe.

On sait que l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Posons $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$. Confondre la courbe et la tangente revient à dire que $f(a+h) \approx g(a+h)$, c'est-à-dire :

$$f(a+h) \approx f'(a)(a+h-a) + f(a),$$

soit :

$$f(a+h) \approx f'(a) \times h + h(a).$$

Or, d'après le point 1, $f'(a) = f(a)$ donc :

$$f(a+h) \approx hf(a) + f(a)$$

soit :

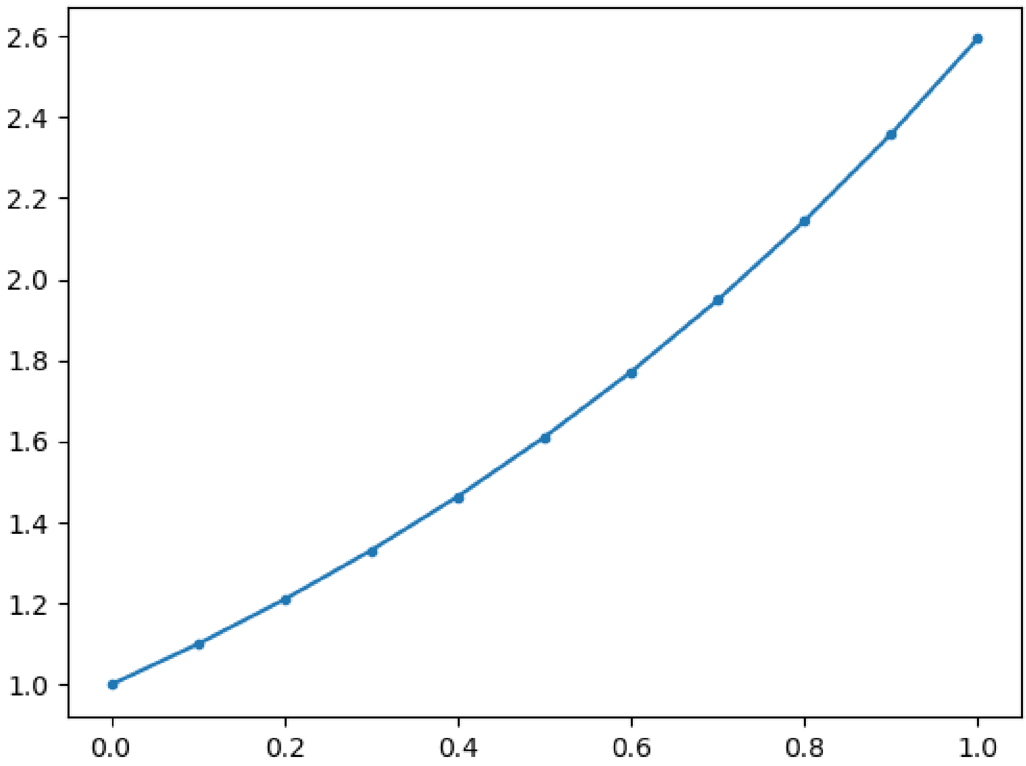
$$f(a+h) \approx (1+h)f(a).$$

h peut être pris aussi petit qu'on le souhaite. Prenons par exemple $h = 0,1$. Alors,

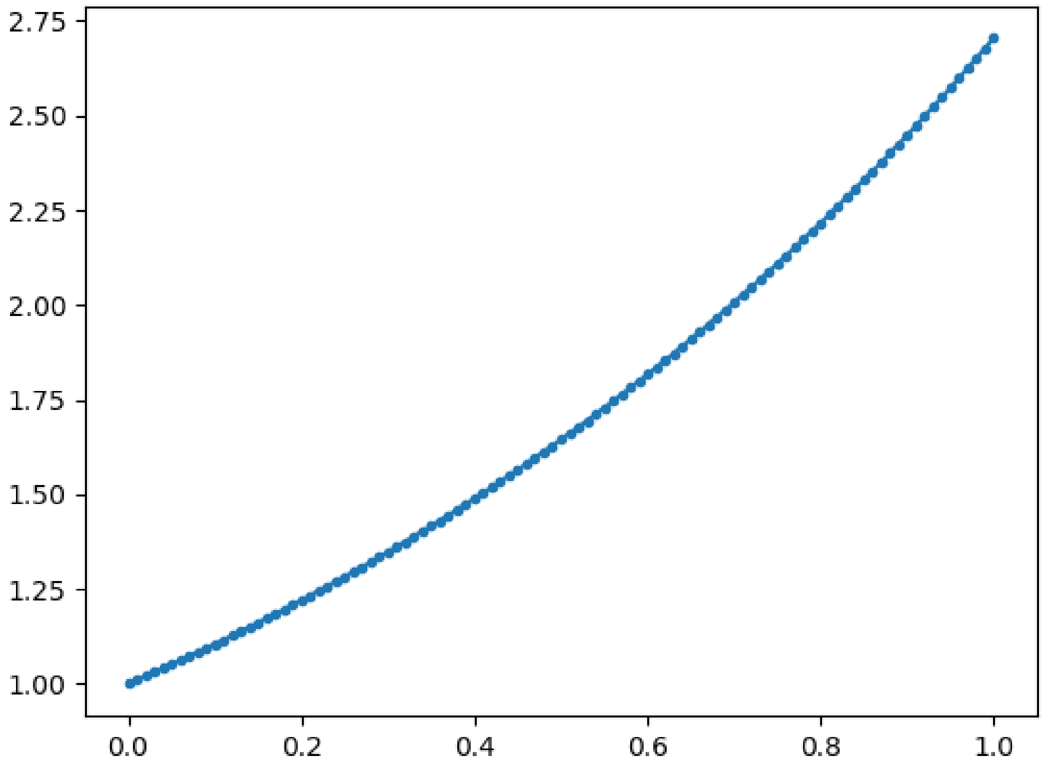
- en prenant $a = 0$: $f(0+0,1) \approx (1+0,1) \times f(0) = 1,1 \times 1 = 1,1$;
- en prenant $a = 0,1$: $f(0,2) = f(0,1+0,1) \approx (1+0,1) \times f(0,1) = 1,1 \times 1,1 = 1,21$;
- en prenant $a = 0,2$: $f(0,3) = f(0,2+0,1) \approx (1+0,1) \times f(0,2) = 1,1 \times 1,21 = 1,331$;
- etc.

Le programme Python suivant permet d'automatiser la construction des segments :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

xList = [0]
yList = [1]

a = 0
h = 0.1

for i in range(10):
    x = a+h
    y = (1+h)*yList[i]
    xList.extend([x])
    yList.extend([y])
    a = x

x = np.array(xList)
y = np.array(yList)
plt.plot(x, y, marker=".")

plt.show()
```



Avec un pas plus petit ($h = 0,01$), on obtient ceci :



On voit alors se dessiner la courbe représentative de la fonction f cherchée.

II. Définition

II. 1. Unicité de la fonction exponentielle

Nous avons vu précédemment comment tracer la représentation graphique d'une fonction f telle que $f' = f$, avec $f(0) = 1$.
Montrons qu'une telle fonction est unique (on suppose son existence).

Pour cela, nous aurons besoin de la propriété suivante.

Propriété 1

Soit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.

Démonstration

Posons $h(x) = f(x) \times f(-x)$. Alors, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et :

$$h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-f'(-x)].$$

Or, $f'(x) = f(x)$ donc :

$$h'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0.$$

La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$.
Or, $h(0) = f(0) \times f(-0) = 1 \times 1 = 1$.
Donc, pour tout réel x, $h(x) = 1$, c'est-à-dire :

$$f(x) \times f(-x) = 1.$$

On en déduit de plus que f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, donc que $f(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Montrons maintenant que f est unique. Pour cela, supposons qu'il existe deux fonctions f et g qui vérifient les même hypothèses mathématiques, à savoir que :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}.$$

Posons alors $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ (d'après la propriété 1, f ne s'annule jamais donc h est bien définie).
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le quotient de deux fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, et :

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g'(x)f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Or, $g' = g$ et $f' = f$ donc :

$$h'(x) = \frac{g(x)f(x) - f(x)g(x)}{[f(x)]^2} = 0.$$

Ainsi, h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $h(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.
Donc, pour tout réel x, $h(x) = 1$, ce qui signifie que $g(x) = f(x)$.
Nous venons donc de montrer qu'il n'existe qu'une fonction remplissant nos exigences.

Théorème 1

Il n'existe qu'une fonction f telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

II. 2. Définition

Déf. 1

On appelle **fonction exponentielle** la fonction exp telle que :

$$\exp' = \exp \qquad \text{et} \qquad \exp(0) = 1.$$

III. Relations fonctionnelles

III. 1. Image d'un opposé

D'après la propriété 1, on peut tout de suite écrire :

Propriété 2

Pour tout réel x,

$$\exp(-1) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

III. 2. Image d'une somme

Propriété 3

Pour tous nombres réels x et y,

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Démonstration

Posons $f(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'(x+y) \times \exp(-x) + \exp(x+y) \times \left[-\exp'(-x)\right] \\ &= \exp(x+y) \times \exp(-x) - \exp(x+y) \times \exp(-x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, f est une fonction constante.
De plus, $f(0) = \exp(0+y) \times \exp(-0) = \exp(y)$ donc, pour tout réel x,

$$f(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x) = \exp(y),$$

c'est-à-dire :

$$\exp(x+y) = \exp(y) \times \frac{1}{\exp(-x)} = \exp(y) \times \exp(x).$$

Corollaire 1

Pour tous réels x et y,

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Démonstration

En considérant la propriété 3 en remplaçant y par $-y$, on a :

$$\exp\left[x+(-y)\right] = \exp(x) \times \exp(-y).$$

D'après la propriété 1, $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$ donc :

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

IV. Notation e^x

IV. 1. Le nombre e

En mathématiques, il est de coutume de désigner par une lettre un nombre important dont l'écriture est infinie. C'est par exemple le cas du nombre π.

C'est la raison pour laquelle on pose :

$$\mathrm{e} = \exp(1).$$

Le nombre e est égal à $\exp(1)$.

Avec la méthode d'Euler, nous avons vu que :

- $\exp(0,1) \approx (1+0,1)$;
- $\exp(0,2) \approx (1+0,1) \times \exp(0,1) \approx (1+0,1)^2$;
- $\exp(0,3) \approx (1+0,1) \times \exp(0,1) \approx (1+0,1)^3$;
- etc.

On peut alors écrire, pour h très proche de 0 et pour tout entier naturel n :

$$\exp(nh) \approx (1+h)^n.$$

En prenant $h = \dfrac{1}{n}$, n étant un entier assez grand pour que $\dfrac{1}{n}$ soit assez proche de 0, on a :

$$\exp(1) \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ainsi, en prenant n de plus en plus grand, le nombre $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ se rapproche du nombre e.

Dans l'exercice **??**, nous en avons trouvé une valeur approchée. Nous prendrons :

$$\boxed{\mathrm{e} \approx 2,71828182846}$$

IV. 2. Vers la notation simplifiée

De la propriété 3, nous pouvons déduire que :

- $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \times \exp(1) = \left(\exp(1)\right)^2 = \mathrm{e}^2$;
- $\exp(3) = \exp(2+1) = \exp(2) \times \exp(1) = \left(\exp(1)\right)^3 = \mathrm{e}^3$;
- $\vdots$
- $\exp(n) = \left(\exp(1)\right)^n = \mathrm{e}^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Ceci nous encourage alors à simplifier l'écriture $\exp(x)$ en e^x, sans pour autant avoir démontré l'égalité pour tout réel x (on laisse cette démonstration aux mathématicien.ne.s averti.e.s).

Ainsi, à partir de maintenant, on notera :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

Les propriétés précédentes s'écrivent alors :

- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$;
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$;
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$;
- $\mathrm{e}^0 = 1$;
- $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$ ou $\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$.

V. La suite (e^{na}), a réel

Soit a un réel. Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \mathrm{e}^{na}.$$

V. 1. La suite est géométrique

Pour démontrer que la suite (u_n) est géométrique, il faut démontrer que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant pour tout entier naturel n.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\mathrm{e}^{(n+1)a}}{\mathrm{e}^{na}} \\
&= \mathrm{e}^{(n+1)a-na} && \text{(d'après la propriété 3)} \\
&= \mathrm{e}^{na+a-na} \\
&= \mathrm{e}^{a}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^a$.

V. 2. Expression du terme général

Par propriété,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

avec $u_0 = \mathrm{e}^0 = 1$. Par conséquent,

$$u_n = \left(\mathrm{e}^a\right)^n.$$

Or, $u_n = \mathrm{e}^{na}$. On en déduit alors la propriété suivante :

Propriété 4

Pour tout réel a et pour tout entier n,

$$\left(\mathrm{e}^a\right)^n = \mathrm{e}^{na}.$$

VI. Étude de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$

VI. 1. Positivité

Propriété 5

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est strictement positive.

Démonstration

Quel que soit le réel x, on peut écrire :

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\times 2}.$$

D'après la propriété 4, cela revient à écrire :

$$\mathrm{e}^x = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Un carré étant toujours positif ou nul, cela signifie que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 0.$$

Or, d'après la propriété 1,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1\,,$$

ce qui implique que pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) > 0.$$

VI. 2. Sens de variation

Propriété 6

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Par définition,

$$\exp' = \exp\,.$$

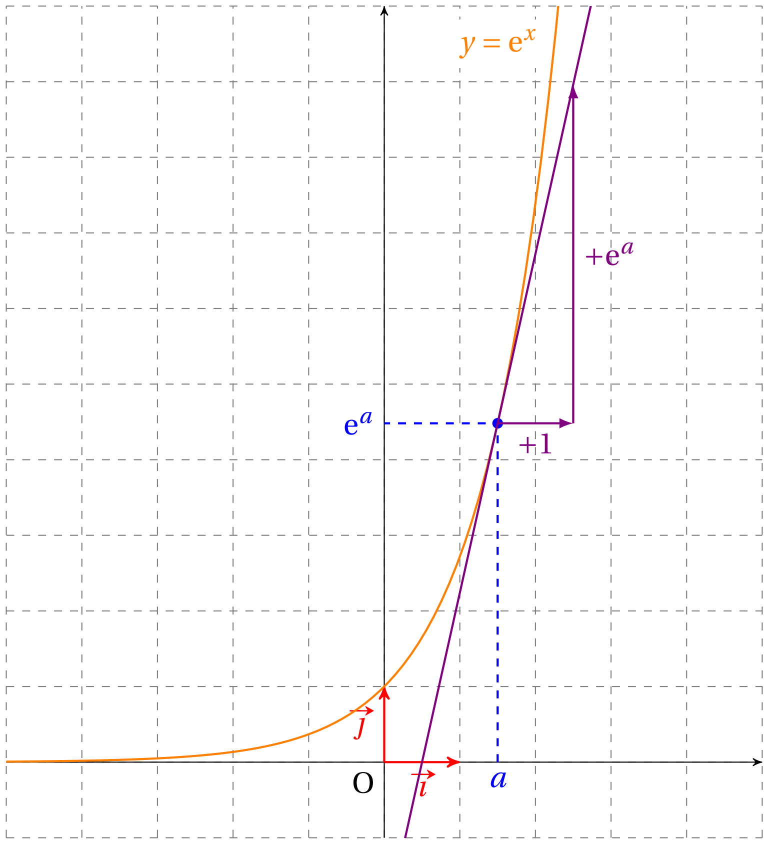
De plus, d'après la propriété 5, pour tout réel x, $\exp(x) > 0$ donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) > 0\,,$$

ce qui signifie que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

VI. 3. Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ est la suivante :



En tout point d'abscisse a, le coefficient directeur de la tangente à la courbe est égal à e^a.

VI. 4. Propriétés de bijectivité

Propriété 7

Pour tous réels x et y,

1. $x = y \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$
2. $x \geqslant y \iff \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^y$
3. $x \leqslant y \iff \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^y$

Ces propriétés découlent de la stricte monotonie de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

VII. Étude des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$

VII. 1. Variations

Posons $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$, où $k \in \mathbb{R}^*$.
Nous avons vu précédemment que la dérivée de toute fonction $g(ax+b)$ était égale à $ag'(ax+b)$. Ainsi,

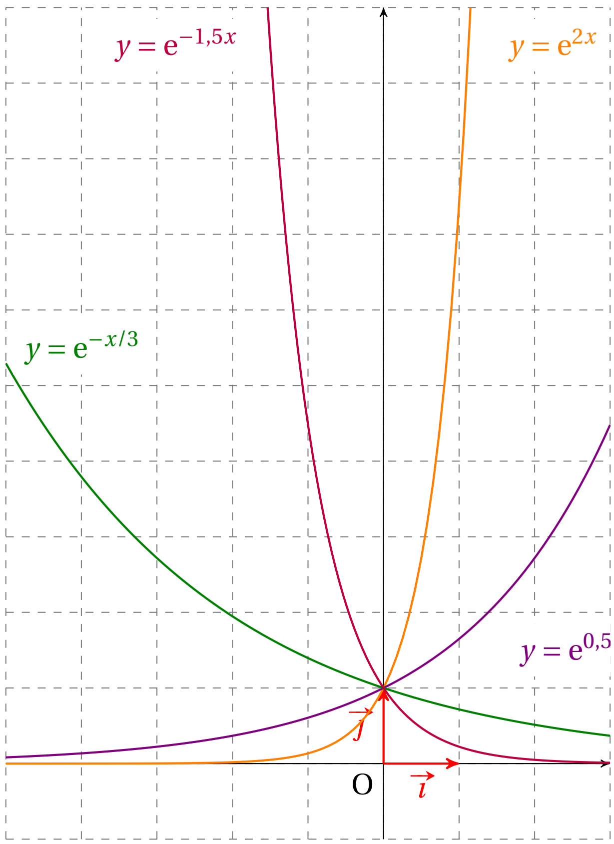
$$f'(x) = k\mathrm{e}^{kx}.$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{kx} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de k. Ainsi,

- si $k < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $k > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

VII. 2. Représentations graphiques

Voici quelques exemples de représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$:



VII. 3. Domaines où l'on rencontre l'exponentielle

VII. 3. a. Radioactivité

> « La radioactivité est le phénomène physique par lequel des noyaux atomiques instables (dits radionucléides ou radioisotopes), se transforment spontanément en d'autres atomes (désintégration) en émettant simultanément des particules de matière (électrons, noyaux d'hélium, neutrons, etc.) et de l'énergie (photons et énergie cinétique). La radioactivité a été découverte en 1896 par Henri Becquerel dans le cas de l'uranium, et très vite confirmée par Marie Curie pour le radium. »

Source : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Radioactivité`

Quand une substance est radioactive, elle ne l'est pas pour toujours. En effet, on montre mathématiquement que le nombre N de noyaux radioactifs diminue avec le temps t et est donné par l'égalité :

$$\mathrm{N}(t) = \mathrm{N}_0 \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

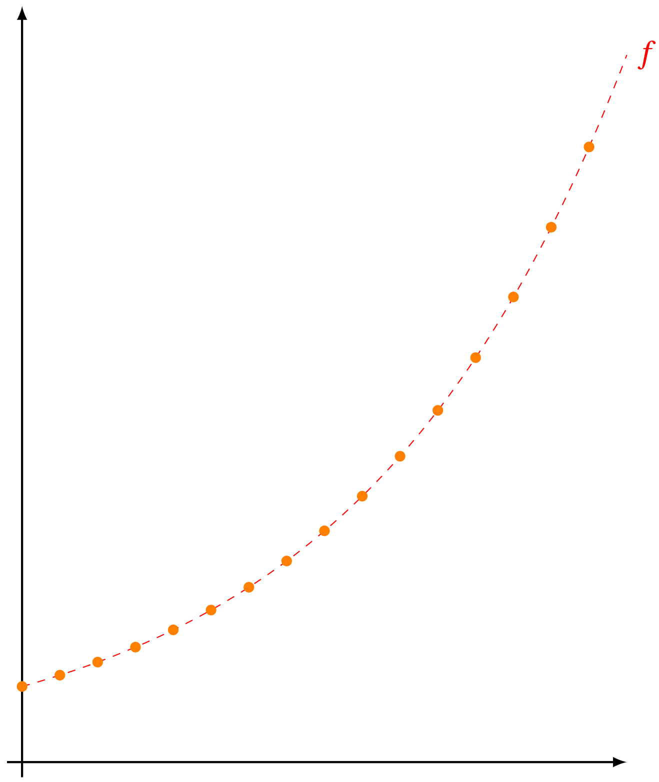
où λ est un paramètre positif dépendant de l'élément radioactif, et N_0 le nombre initial observé de noyaux radioactifs.

VII. 3. b. Évolution d'un capital à taux fixe

Lorsque l'on place un capital sur un compte à taux fixe, cela signifie que chaque année (si on n'y touche pas entre temps), on ajoute un certain pourcentage t au capital de l'année précédente. Cela se traduit par l'égalité :

$$\mathrm{C}_n = \mathrm{C}_0 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n.$$

Si on place les points représentant cette suite, on constate qu'ils suivent une courbe exponentielle :



On arrive à montrer que la fonction f s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \mathrm{C}_0 \mathrm{e}^{kx}, \quad k > 0.$$

Remarque. Ici, le paramètre k est ce que l'on nomme le **logarithme népérien** du nombre $1 + \dfrac{t}{100}$. On le note $\ln\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$.

VII. 3. c. Décroissance thermique

La police scientifique utilise quelques fois (doux euphémisme...) les mathématiques. C'est le cas quand elle souhaite déterminer l'heure de la mort d'une personne. Pour cela, elle utilise la formule :

$$\frac{\mathrm{T}_{\text{corps}} - \mathrm{T}_{\text{ambiante}}}{37,2 - \mathrm{T}_{\text{ambiante}}} = 1,25\mathrm{e}^{-kt} - 0,25\mathrm{e}^{-5kt},$$

où :

- $\mathrm{T}_{\text{corps}}$ désigne la température (en °C) du corps ;
- $\mathrm{T}_{\text{ambiante}}$ désigne la température (en °C) du milieu où se trouve le corps ;
- k est un paramètre dépendant de la masse (en kg) du corps, avec $k = \dfrac{1,2815}{\mathrm{e}^{0,625\ln(\mathrm{M})}} - 0,0254$, où $\ln(\mathrm{M})$ désigne le logarithme népérien de M (vous en saurez plus sur le logarithme népérien l'année prochaine).

À l'aide de cette égalité, on peut trouver le réel t, qui représente ici la différence entre l'heure de la mort et l'heure des relevés.
Par exemple, si on trouve $t \approx 7,5$, cela signifie que l'heure de la mort remonte à 7h30min.