CHAPITRE 5

# Fonctions trigonométriques

## Plan de ce chapitre


**I. Cerce trigonométrique** . . . . . . . . . . **2**
I. 1. Définitions et représentation . . . . . . . . . . 2
I. 2. Radians . . . . . . . . . . 3
I. 3. Valeurs remarquables . . . . . . . . . . 4
**II. Sinus et cosinus** . . . . . . . . . . **4**
II. 1. Définitions . . . . . . . . . . 4
II. 2. Propriété fondamentale . . . . . . . . . . 5
II. 3. Sinus et cosinus des angles remarquables . . . . . . . . . . 5
II. 4. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle . . . . . . . . . . 7
**III. Fonctions sinus et cosinus** . . . . . . . . . . **9**
III. 1. Parité . . . . . . . . . . 9
III. 2. Périodicité . . . . . . . . . . 10
III. 3. Courbes représentatives . . . . . . . . . . 10
III. 4. Dérivées . . . . . . . . . . 11

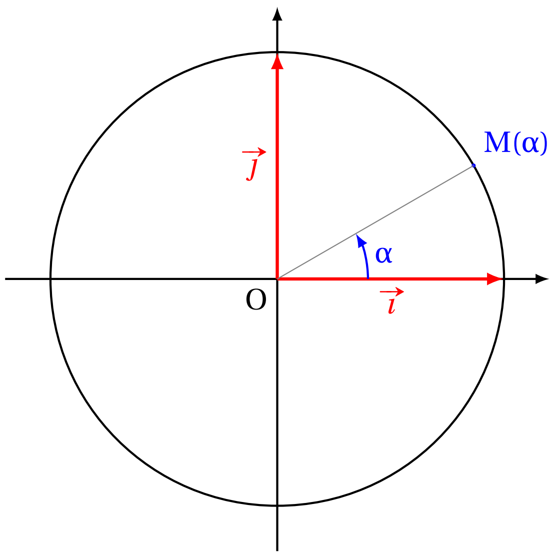
# I. Cercle trigonométrique

## I. 1. Définitions et représentation

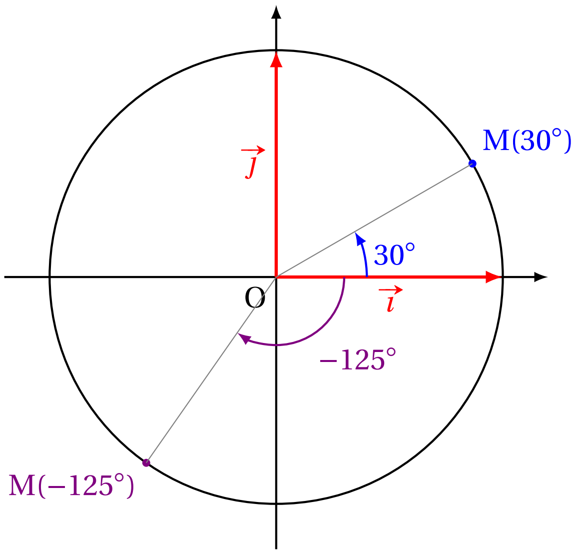
Définitions 1

Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on peut considérer des points M repérés par l'angle formé par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OM}$, noté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.

Le **sens trigonométrique** est le sens de la rotation qui transforme $\vec{\imath}$ en $\vec{\jmath}$ ; c'est le sens *positif* (concernant le signe des angles).



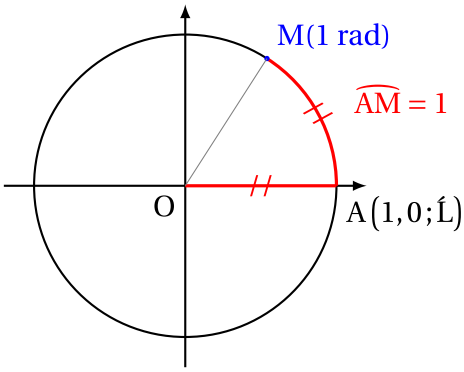

**Exemple 1**



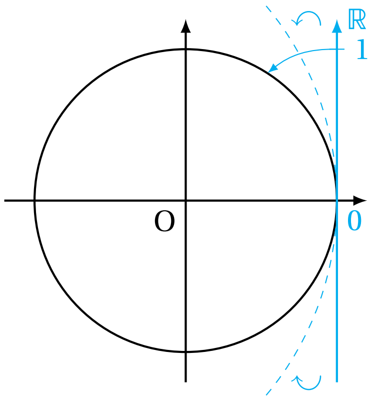
## I. 2. Radians

**Définition 2**

Soit A(1 ; 0).
On appelle **radian** l'angle dont la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est égale à 1.




À partir de là, on peut imaginer que l'on enroule la droite des réels sur le cercle trigonométrique, en mettant « 0 » sur le point A :




Ainsi, tous les nombres réels vont se retrouver sur le cercle trigonométrique, et vont correspondre à des points M($\alpha$). On dira alors que M($\alpha$) est l'image du nombre réel $\alpha$ sur le cercle trigonométrique.
On en déduit alors la propriété suivante :

**Propriété 1**

Un point M peut être l'image de plusieurs nombres réels.

Autrement dit, il existe une infinité de nombres réels qui ont pour image un point donné sur le cercle trigonométrique.

**Déf. 3**

- On appelle **angles en radians** d'un point M du cercle trigonométrique tout réel dont l'image sur ce cercle est M.
- On appelle **mesure principale** tout angle dans $]-\pi\,;\pi]$.

Ainsi, tous les angles que nous connaissons en degrés auront un équivalent en radians.

## I. 3. Valeurs remarquables

| Angles (en degrés) | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 180 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Angles (en radians) | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $2\pi$ |

Remarquez que ce tableau est un tableau de proportionnalité. Ainsi, pour convertir un angle exprimé en degrés en radians, il suffira de partir, par exemple, du fait que $\pi$ rad = 180°.

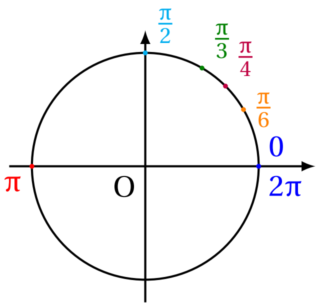
**Exemple 2**

Pour convertir 72° en radians, on calcule :

$$\frac{\pi}{180} \times 72 = \frac{2\pi}{5}.$$

Donc $72° = \frac{2\pi}{5}$ rad.

Les points du cercle trigonométrique images des nombres 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ et $2\pi$ sont les suivants :



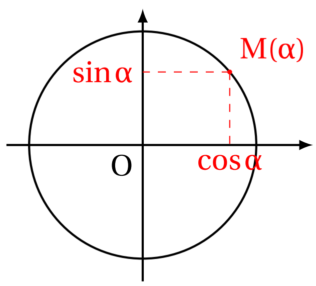

# II. Sinus et cosinus

## II. 1. Définitions

**Définitions 4**

Soit M(α) un point sur le cercle trigonométrique.

- On appelle **cosinus** de l'angle α, et on note cos(α) ou cos α, l'abscisse du point M ;
- On appelle **sinus** de l'angle α, et on note sin(α) ou sin α, l'ordonnée du point M.



## II. 2. Propriété fondamentale

**Propriété 2**

Pour tout nombre réel $x$,

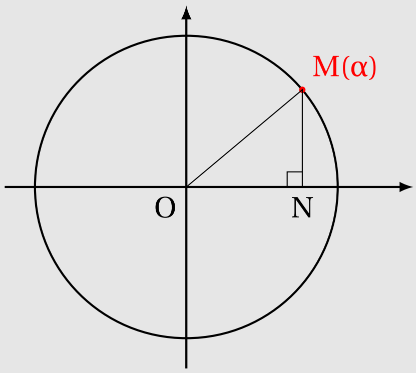
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

**Remarque.** On peut écrire cette égalité sous la forme :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

**Démonstration**

Notons N le point de coordonnées $(\cos\alpha\,;0)$.
Le triangle OMN est rectangle en N.




Ainsi, d'après le théorème de Pythagore :

$$\text{OM}^2 = \text{ON}^2 + \text{MN}^2.$$

Or, OM = 1 (car c'est le rayon du cercle trigonométrique), ON = $\cos\alpha$ et MN = $\sin\alpha$, d'où :

$$1 = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2.$$

$\alpha$ est un nombre réel et on peut le noter aussi $x$ (ce qui est le cas dans la propriété).

## II. 3. Sinus et cosinus des angles remarquables

**Propriété 3**

| Angles (en radians) | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cosinus | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| Sinus | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |

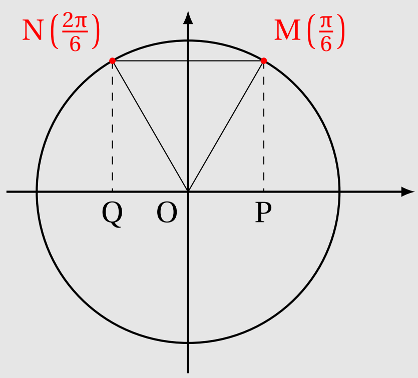
**Démonstration**

- Pour $\dfrac{\pi}{4}$.

  Le triangle OMN est rectangle isocèle, donc $\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4}$. La propriété 2 devient alors :
  $$\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \text{soit} \qquad 2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1.$$
  On en déduit alors que :
  $$\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$
  et donc :
  $$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
  car $\cos\dfrac{\pi}{4} > 0$.

- Pour $\dfrac{\pi}{3}$.

  Considérons les points $\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\mathrm{N}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ sur le cercle trigonométrique, ainsi que leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses P et Q :

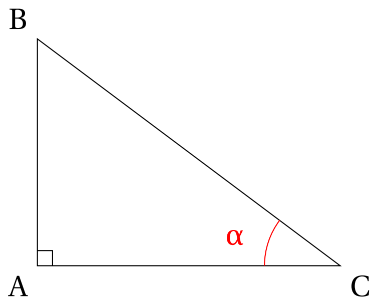



  Le triangle OMN est alors équilatéral car $\widehat{\mathrm{MON}} = \dfrac{\pi}{3}$ (60°) et OM = ON. Ainsi, MN = MO = 1.
  On en déduit que QP = 1 ; or, M et N étant symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, il en est de même de P et Q. Ainsi, $\mathrm{OP} = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.
  À l'aide de la propriété 2, on en déduit $\sin\dfrac{\pi}{3}$ :
  $$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} = 1 &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{3} = 1\\ &\iff \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\\ &\iff \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

- Les sinus et cosinus de $\dfrac{\pi}{6}$ se trouvent par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait pour $\dfrac{\pi}{3}$.
  Quant aux autres, elles sont immédiates.

## II. 4. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle

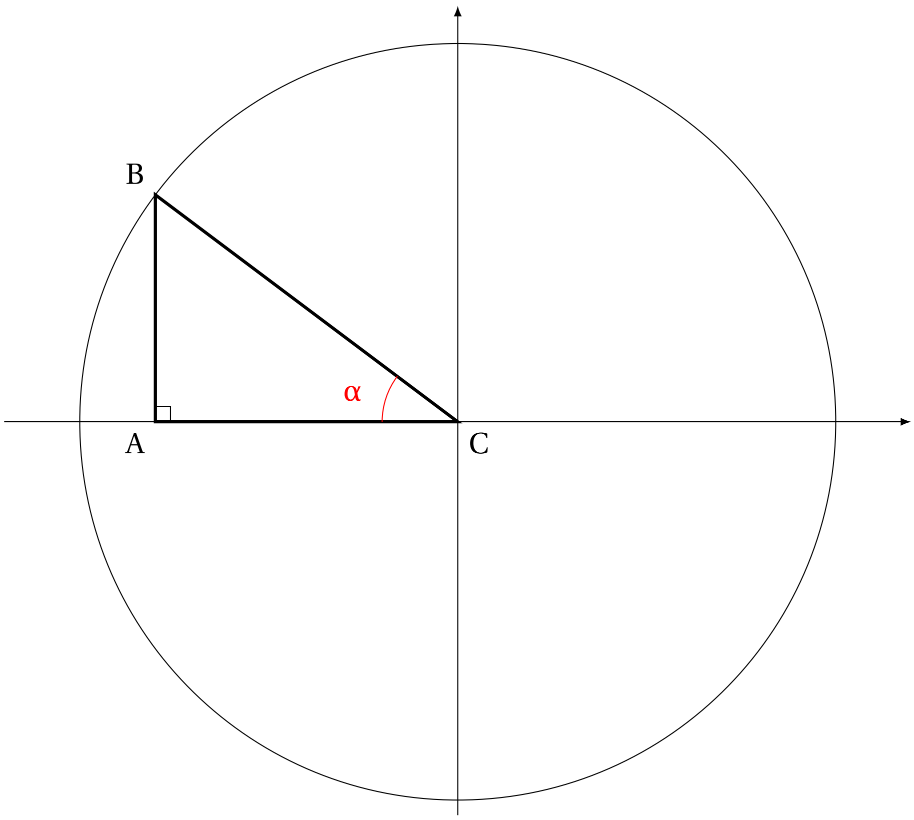
On considère un triangle ABC rectangle en A.



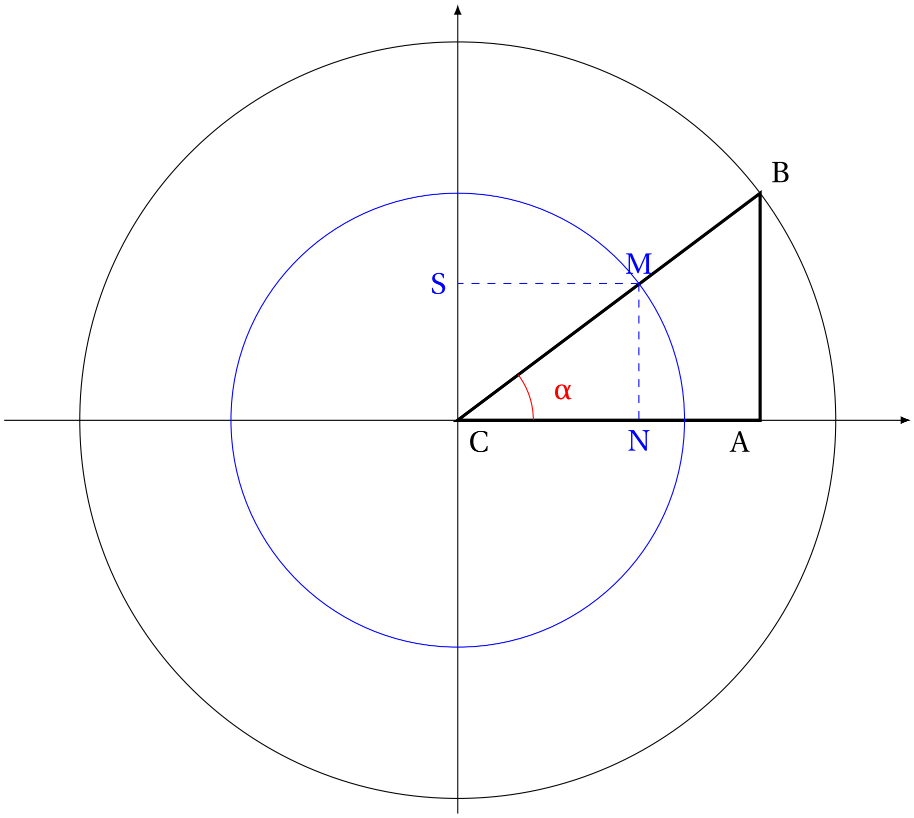

Au collège, vous avez vu les formules suivantes :

$$\cos\alpha = \frac{AC}{BC} \qquad \text{et} \qquad \sin\alpha = \frac{AB}{BC}.$$

Ces formules ne rentrent pas en contradiction avec celles que nous avons introduites précédemment.
En effet, on peut considérer le cercle de centre C passant par B ainsi que deux axes comme sur la figure suivante :



En faisant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, et en traçant le cercle trigonométrique (de rayon 1, en bleu), on obtient :




Par construction, (MN)//(AB) donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{MN}{AB} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\cos\alpha}{CA} = \frac{1}{CB} = \frac{\sin\alpha}{AB}.$$

On en déduit (à l'aide de la première égalité) :

$$\frac{\cos\alpha}{CA} = \frac{1}{CB} \iff \cos\alpha = \frac{CA}{CB}$$

et (à l'aide de la seconde égalité) :

$$\frac{1}{CB} = \frac{\sin\alpha}{AB} \iff \sin\alpha = \frac{AB}{CB}.$$

Ainsi, à partir des définitions vues cette année, on peut retrouver celles vues en collège.

# III. Fonctions sinus et cosinus

## III. 1. Parité

**Déf. 5**

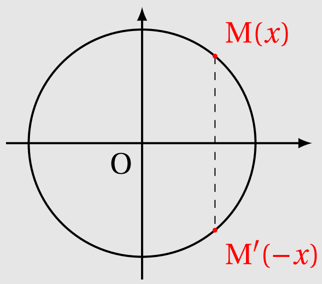
- On dit qu'une fonction est **paire** si son domaine de définition $\mathscr{D}$ est centré en 0 et si, pour tout $x$ dans $\mathscr{D}$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit qu'une fonction est **impaire** si son domaine de définition $\mathscr{D}$ est centré en 0 et si, pour tout $x$ dans $\mathscr{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

**Propriété 4**

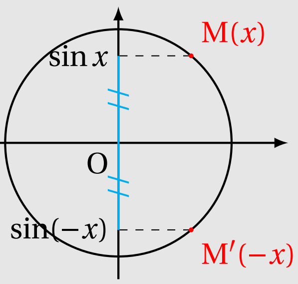
- La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire.
- La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire.

**Démonstration**

- Fonction $x \mapsto \cos x$.
  Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
  De plus, nous avons :




  Ainsi, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction $x \mapsto \cos x$ est donc paire.
- Fonction $x \mapsto \sin x$.
  Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
  De plus, nous avons :




  Ainsi, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (car M et M′ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses).

## III. 2. Périodicité

**Déf. 6** On dit qu'une fonction $f$ est **T-périodique** si son domaine de définition $\mathscr{D}$ est centré en 0 et si, pour tout réel de $\mathscr{D}$,

$$f(x+\mathrm{T}) = f(x).$$

**Propriété 5**

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont $2\pi$-périodiques.

**Démonstration**

La longueur du cercle trigonométrique est égale à $2\pi$. Ainsi, les nombres $x$ et $x+2\pi$ auront la même image sur le cercle trigonométrique, ce qui signifie que :

$$\cos(x) = \cos(x+2\pi) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \sin(x+2\pi).$$

De plus, les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ (qui est centré en 0).
Donc $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont $2\pi$-périodiques.

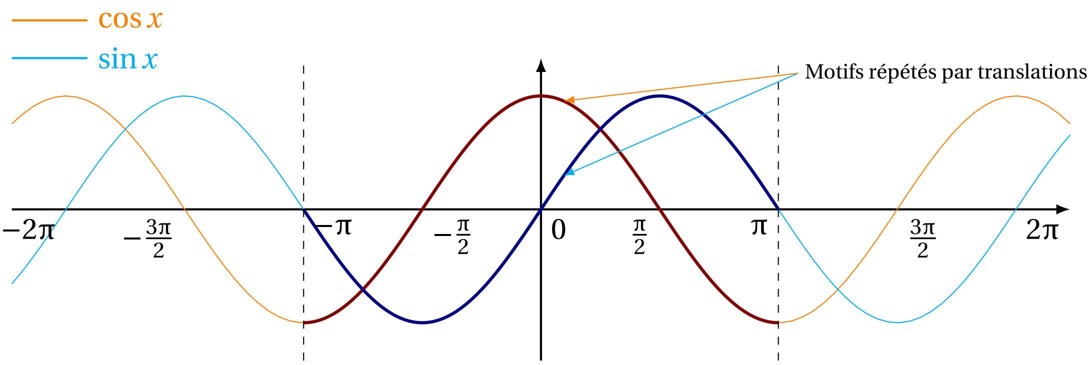
**Remarque.** On peut aussi dire que les fonctions sont périodiques de période $2\pi$.

## III. 3. Courbes représentatives

- Le fait de dire que les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont $2\pi$-périodiques signifie que si on prend n'importe quel intervalle d'amplitude $2\pi$, le motif de la courbe représentative trouvé sur cet intervalle pourra se répéter.
  On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, et déduire la totalité des courbes par translations de vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2k\pi\\0\end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}^*$.
- Le fait de dire que $x \mapsto \cos x$ est paire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (car $f(-x) = f(x)$).
  De plus, le fait de dire que $x \mapsto \sin x$ est impaire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère (car $f(-x) = -f(x)$).

  On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, et déduire les courbes par symétries (axiale ou centrale).

Au final, les courbes représentatives sont les suivantes.



## III. 4. Dérivées

**Propriété 6**

- La dérivée de la fonction $x \mapsto \cos x$ est la fonction $x \mapsto -\sin x$.
- La dérivée de la fonction $x \mapsto \sin x$ est la fonction $x \mapsto \cos x$.

**Remarque.** Un moyen mnémotechnique pour se souvenir de cette formule est de dire que dériver revient à tourner de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre :