CHAPITRE 5

Repérage dans le plan

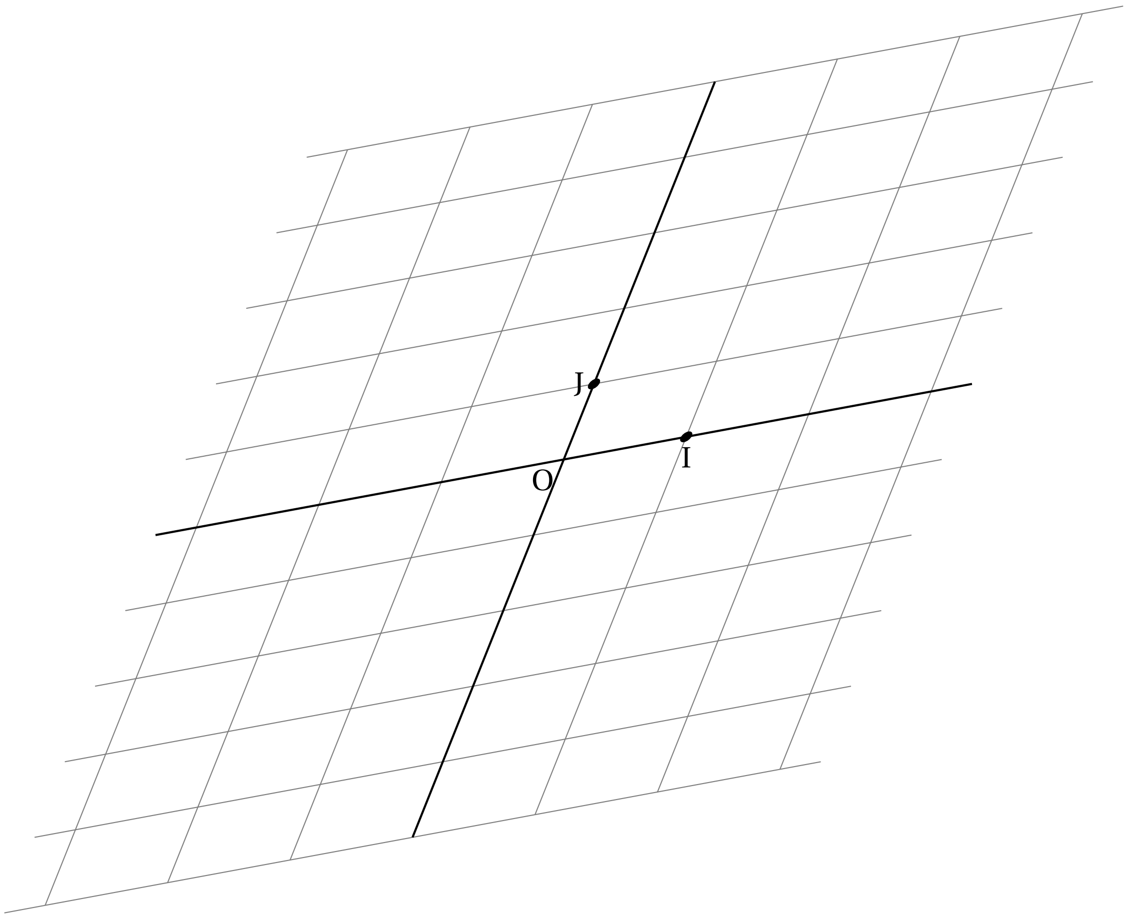
Plan de ce chapitre

I. Repère

I. 1. Définition générale

Déf.1 Soient O, I et J trois points du plan euclidien tels que $I \notin (OJ)$.
Alors, on dit que (O ; I, J) est un repère cartésien du plan.

Cela signifie que l'on fait un *maillage* du plan en traçant des droites parallèles à (OI) et parallèles à (OJ) comme ceci :



Afin de faciliter les représentations futures, on fera en sorte que (OI) et (OJ) soient perpendiculaires, ce qui rend le repère **orthogonal**.
Si de plus OI = OJ alors le repère est dit **orthonormé** (*ortho* = « angle droit » et *normé* signifie que OI = OJ).

Les droites (OI) et (OJ) sont orientées (comme la droite graduée représentant les nombres réels). Un repère est donc constitué de deux droites graduées qui se coupent en « 0 ». Ces deux droites sont alors appelées les **axes** du repère.

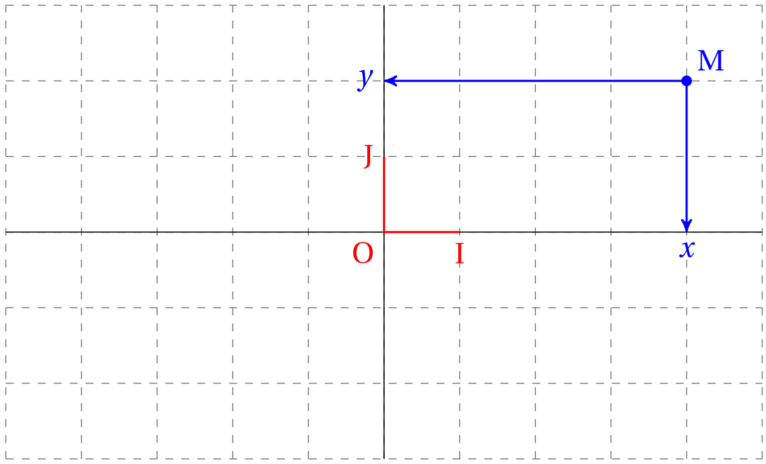
Dans la suite de ce chapitre, on se placera dans un repère orthonormé.

I. 2. Coordonnées d'un point

Définitions 2

On considère que le plan est rapporté à un repère orthonormé (O,I,J).
Soit M un point quelconque du plan.
Par M, on trace la parallèle à (OJ) ; elle coupe (OI) en x.
Par M, on trace la parallèle à (OI) ; elle coupe (OJ) en y.
Alors, x est appelé l'**abscisse** de M et y, son **ordonnée**.
Le couple $(x ; y)$ représente les **coordonnées** du point M, et on note : $M(x ; y)$.

Exemple 1



Ici, $M(4;2)$. Son abscisse est 4, son ordonnée est 2.

II. Distance entre deux points

Propriété 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Dans ce repère, soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points quelconques.
Alors, la distance entre A et B est donnée par la formule :

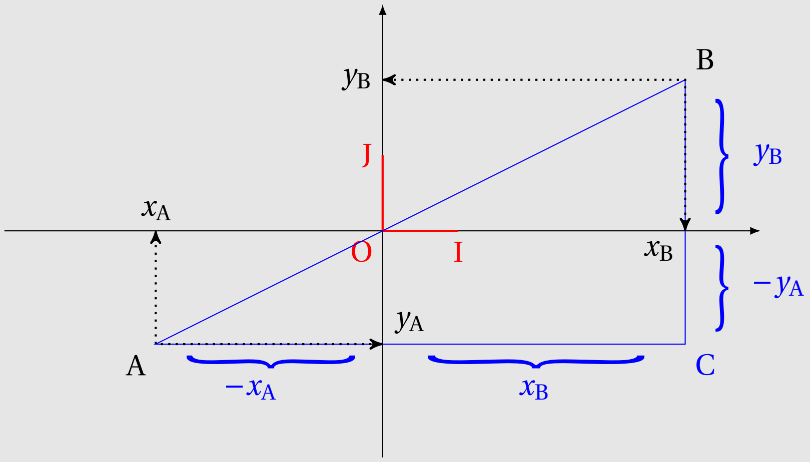
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple 2

Soient $A(-3;2)$ et $B(5;-7)$. Alors,

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5-(-3))^2 + (-7-2)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-9)^2} \\ \boxed{AB} &\boxed{= \sqrt{145}} \end{aligned}$$

Démonstration



Le repère est orthonormé donc le triangle ABC tracé en bleu est rectangle en C.
Ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2.$$

Or,

$$\mathrm{AC} = \left| x_B - x_A \right|, \text{ donc } \mathrm{AC}^2 = \left| x_B - x_A \right|^2 = (x_B - x_A)^2$$

et

$$\mathrm{BC} = \left| y_B - y_A \right|, \text{ donc } \mathrm{BC}^2 = \left| y_B - y_A \right|^2 = (y_B - y_A)^2.$$

Donc,

$$\mathrm{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2.$$

En prenant la racine carrée de chacun des membres de cette dernière égalité, on a :

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}.$$

III. Milieu d'un segment

Propriété 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Dans ce repère, soient $\mathrm{A}\left(x_A ; y_A\right)$ et $\mathrm{B}\left(x_B ; y_B\right)$ deux points quelconques.
Soit $\mathrm{M}\left(x_M ; y_M\right)$ le milieu du segment [AB]. Alors,

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

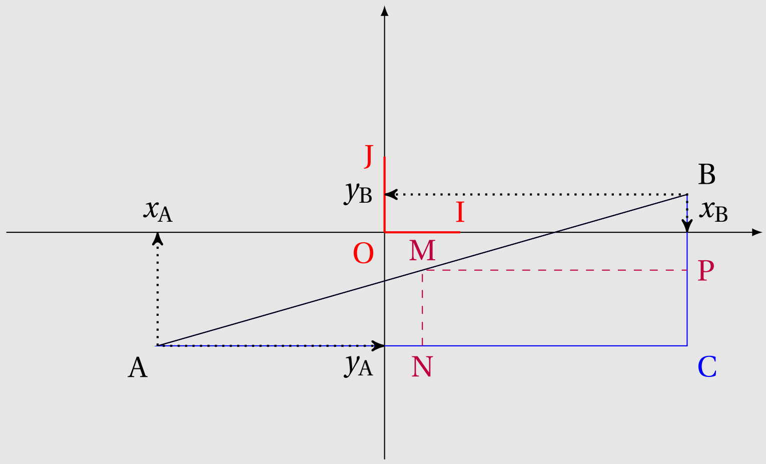
Exemple 3

Soient A(1 ; 7) et B(3 ; −1). Soit M le milieu de [AB] ; donc :

$$x_M = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{7+(-1)}{2} = 3.$$

Démonstration

On construit le triangle ABC rectangle en C comme indiqué ci-dessous :



On trace la parallèle à (BC) passant par M ; elle coupe [AC] en N.
On trace la parallèle à (AC) passant par M ; elle coupe [BC] en P.
D'après le théorème des milieux, P est le milieu de [BC] et N celui de [AC].
Ainsi,

$$AN = \frac{1}{2}AC$$
$$AN = \frac{1}{2}(x_C - x_A)$$
$$AN = \frac{1}{2}x_C - \frac{1}{2}x_A$$

et donc :

$$x_N = x_A + AN$$
$$x_N = x_A + \frac{1}{2}x_C - \frac{1}{2}x_A$$
$$x_N = \frac{1}{2}x_A + \frac{1}{2}x_C$$
$$x_M = x_N = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ car } x_C = x_B.$$

$$PC = \frac{1}{2}BC$$
$$PC = \frac{1}{2}\left(y_B - y_C\right) \text{ (il faut que } PC \geqslant 0)$$
$$PC = \frac{1}{2}y_B - \frac{1}{2}y_C$$

et donc :

$$y_P = y_C + PC$$
$$y_P = y_C + \frac{1}{2}y_B - \frac{1}{2}y_C$$
$$y_P = \frac{1}{2}y_B + \frac{1}{2}y_C$$
$$y_M = y_P = \frac{y_A + y_B}{2} \text{ car } y_C = y_A.$$