CHAPITRE 6

Produit scalaire

Plan de ce chapitre

I. Géométrie non repérée **2**

I. 1. Définition du produit scalaire 2

I. 2. Orthogonalité de deux vecteurs 3

I. 3. Produit scalaire et normes 4

I. 4. Propriétés algébriques du produit scalaire 5

I. 5. Identités avec les normes 7

II. Géométrie repérée **9**

II. 1. Calcul du produit scalaire 9

II. 2. Application pour trouver la mesure d'un angle 10

III. Applications du produit scalaire **10**

III. 1. Formule d'Al-Kashi 10

III. 2. Théorème de la médiane 11

III. 3. Ligne de niveau 12

III. 4. Centre de gravité d'un triangle 13

III. 5. Équation cartésienne de cercles 15

III. 6. Vecteur normal d'une droite 16

I. Géométrie non repérée

Dans cette section, nous nous placerons dans un plan euclidien.

I. 1. Définition du produit scalaire

Définition 1

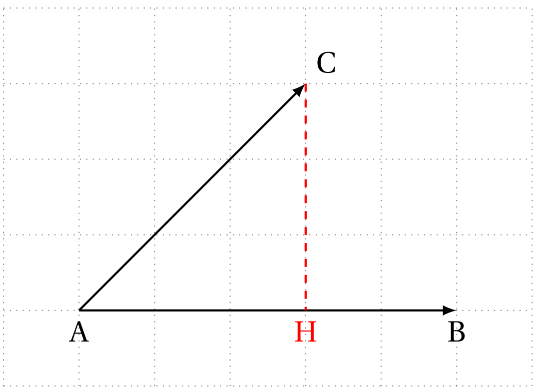
Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, est défini par :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.

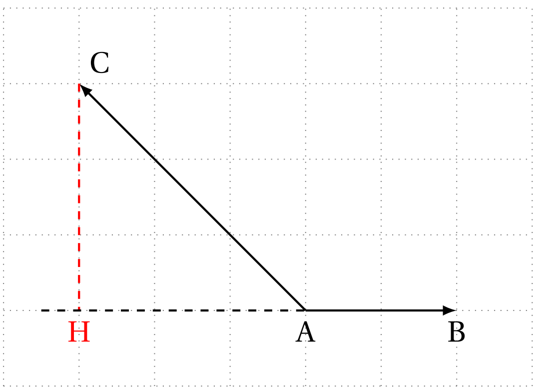
Exemples 1

1. Cas où l'angle est aigu.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AH \\ &= 5 \times 3 \\ &= 15.\end{aligned}$$

2. Cas où l'angle est obtus.

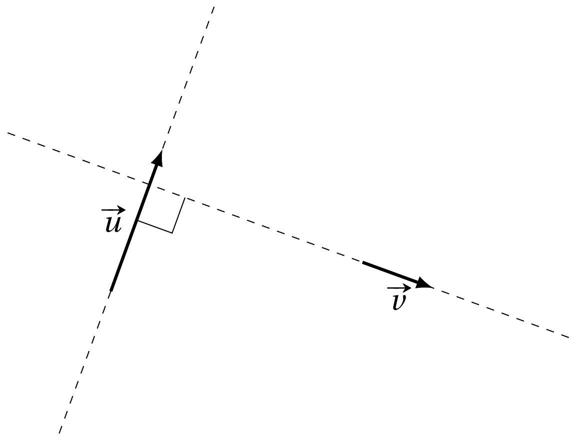


$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -AB \times AH \\ &= -2 \times 3 \\ &= -6.\end{aligned}$$

Remarque. N'essayez pas d'interpréter le produit scalaire de façon géométrique car dans un cas général, le produit scalaire n'a aucune signification géométrique particulière.
Ce pendant, il existe un cas où le produit scalaire a une signification géométrique ; c'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

I. 2. Orthogonalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont orthogonaux si leur support (les droites ayant la même direction) forment un angle droit.
Par exemple, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont orthogonaux :

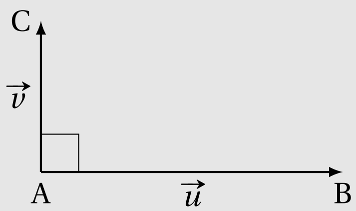


Propriété 1

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Démonstration

- Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.



Par définition, si on note H le projeté orthogonal de C sur (AB), on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AH} \\ &= \mathrm{AB} \times 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- Supposons que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
  Notons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, puis H le projeté orthogonal de C sur (AB).
  Alors, $\mathrm{AB} \times \mathrm{AH} = 0$. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\mathrm{AB} \neq 0$, ce qui signifie donc que $\mathrm{AH} = 0$.
  Or, $\mathrm{H} \in (\mathrm{AB})$ par construction, donc H est confondu avec A.
  H étant le projeté orthogonal de C sur (AB), cela signifie que (AC) est perpendiculaire à (AB), c'est-à-dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

  Ainsi, si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

On déduit de cela l'équivalence.

I. 3. Produit scalaire et normes

Propriété 2

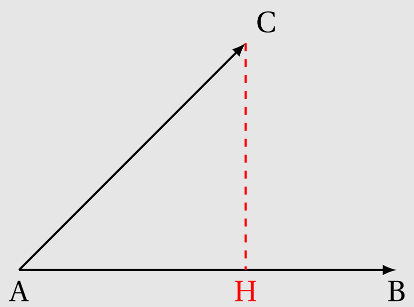
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan. Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

où $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ représente l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en tournant dans le sens trigonométrique.

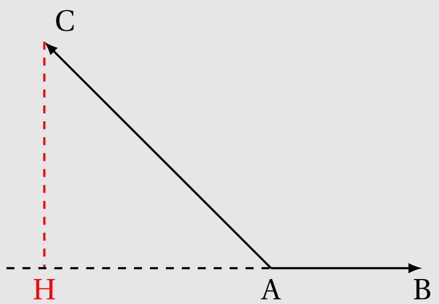
Démonstration

On place les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de sorte qu'ils aient la même origine.
On note alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



- **1er cas.**

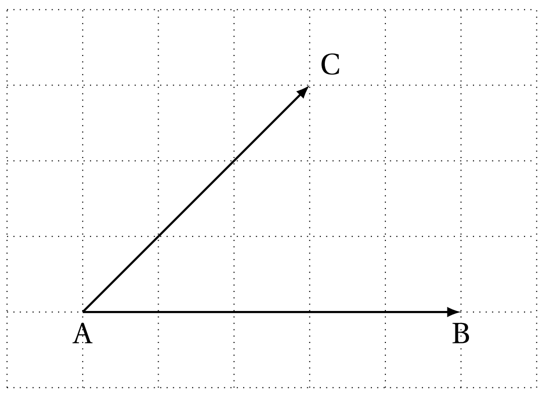
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= AB \times AH\\ &= AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right).\end{aligned}$$



- **2^{e} cas.**

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= -AB \times AH\\ &= -AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC}\right)\\ &= -AB \times AC \times \left(-\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right)\\ &= AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right).\end{aligned}$$

Exemple 2



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\\ &= 5 \times 3\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4}\\ &= 15\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= 15.\end{aligned}$$

I. 4. Propriétés algébriques du produit scalaire

I. 4. a. Distributivité

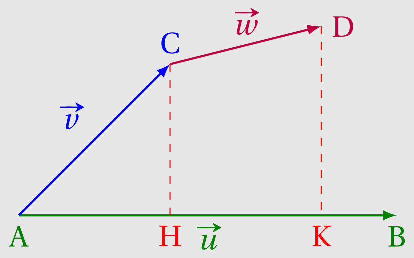
Propriété 3

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Alors,

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\,.$$

Démonstration

Considérons les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme sur le schéma ci-dessous.
On ne considèrera que le cas où les produits scalaires rencontrés sont positifs (car le cas où ils sont négatifs est similaire).



D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)&=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\&=AB\times AK\,.\qquad(1)\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=AB\times AH\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{w}&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=AB\times HK\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}&=AB\times AH+AB\times HK\\&=AB\times\left(AH+HK\right)\\&=AB\times AK\,.\qquad(2)\end{aligned}$$

Des égalités (1) et (2), on peut déduire :

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\,.$$

Exemple 3

Quels que soient les points A, B, C et D du plan :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

I. 4. b. Symétrie (commutativité)

Propriété 4

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\&=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left[-\left(\vec{v},\vec{u}\right)\right]\\&=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{v},\vec{u}\right)&&\text{car la fonction } x\mapsto\cos x \text{ est paire}\\&=\|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos\left(\vec{v},\vec{u}\right)&&\text{car pour } a \text{ et } b \text{ réels, } a\times b=b\times a\\&=\vec{v}\cdot\vec{u}\,.\end{aligned}$$

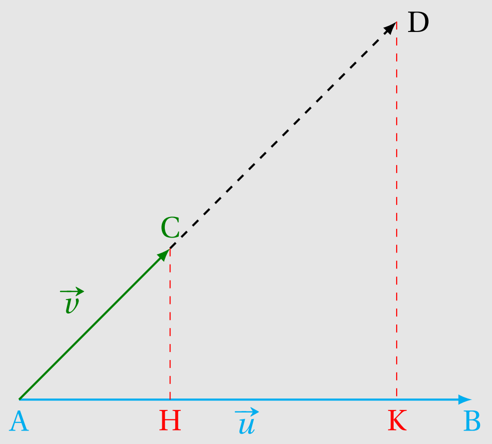
I. 4. c. Bilinéarité

Lemme 1

Soit $k\in\mathbb{R}^*$, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors,

$$\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right).$$

Démonstration



Notons $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\lambda\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.
D'après le théorème de Thalès,

$$AD=kAC\Longrightarrow AK=kAH\,.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)&=AB\times AK\\&=AB\times kAH\\&=kAB\times AH\end{aligned}$$

et

$$k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=kAB\times AH\,.$$

Donc, $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$.

Un raisonnement analogue montrerait que $\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$.

De ce lemme [1], on déduit la propriété suivante :

Propriété 5

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors,

$$(k\vec{u}) \cdot (k\vec{v}) = k^2(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Démonstration

D'après le lemme 1,

$$(k\vec{u}) \cdot (k\vec{v}) = k(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k^2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

I. 5. Identités avec les normes

Lemme 2

Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Démonstration

1. $$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{u}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 \\ &= \|\vec{u}\|^2.\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 \\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.\end{aligned}$$

De ce lemme, on peut déduire la propriété suivante :

Propriété 6

Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).$$

1. Un lemme est une propriété dont le résultat est jugé peu important

Démonstration

- Nous avons vu précédemment que :

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\,,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\,.$$

En isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$, on arrive à :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)}\,.$$

- En exploitant l'égalité :

$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\,,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\,,$$

on arrive à :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)}\,.$$

- En ajoutant les deux précédentes égalités, on a :

$$\begin{aligned}2\vec{u}\cdot\vec{v}&=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)}\,.$$

II. Géométrie repérée

Dans cette section, on rapporte le plan euclidien à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$orthonormé.

II. 1. Calcul du produit scalaire

Propriété 7

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' .$$

Démonstration

D'après la propriété 6,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).$$

On sait que :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

et

$$\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$$

car on est dans un repère orthonormé.
De plus,

$$(\vec{u} - \vec{v})\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \\ &= x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - x'^2 + 2xx' - x^2 - y'^2 + 2yy' - y^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2xx' + 2yy'\right) \\ &= xx' + yy' . \end{aligned}$$

Exemple 4

On pose $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ deux vecteurs d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Alors,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 5\times 1+(-2)\times 7\\ &= 5-14\\ &= -9.\end{aligned}$$

II. 2. Application pour trouver la mesure d'un angle

Reprenons les vecteurs de l'exemple précédent : $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

Nous avons vu que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-9.$$

Or,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= \sqrt{5^2+(-2)^2}\times\sqrt{1^2+7^2}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= \sqrt{29}\times\sqrt{50}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= 5\sqrt{58}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$-9=5\sqrt{58}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right),$$

soit :

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\frac{9}{5\sqrt{58}}\approx -0,236351579148\,.$$

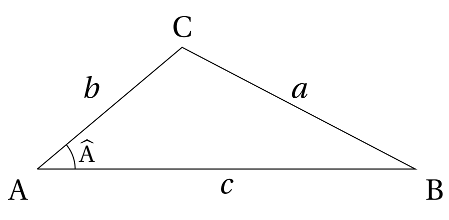
On en déduit alors :

$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)\approx 104°.$$

III. Applications du produit scalaire

III. 1. Formule d'Al-Kashi

Propriété 8



Soit ABC un triangle quelconque. En notant :

$$a=\mathrm{BC}\quad,\quad b=\mathrm{AC}\quad,\quad c=\mathrm{AB}\quad,\quad \widehat{\mathrm{A}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right),$$

on a :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}\,.$$

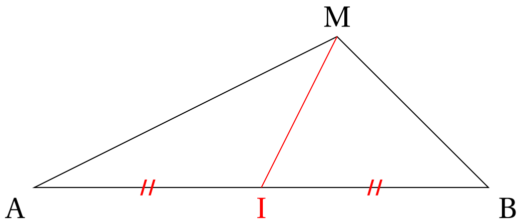
Démonstration

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC}^2 &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2\\
&= \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2\\
&= BA^2 + 2BA\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right) + AC^2\\
&= AB^2 + AC^2 + 2AB\times AC\times\left(-\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right)\\
&= AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right).
\end{aligned}$$

III. 2. Théorème de la médiane

Théorème 1

Soient A, B et M trois points quelconques du plan.



Alors,

$$MA^2 + MB^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2MI^2.$$

Démonstration

Nous allons utiliser la relation de Chasles en « injectant » le point I dans les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2\\
&= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2\\
&= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2\\
&= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)}_{=\vec{0}}\\
&= 2MI^2 + IA^2 + IB^2\\
&= 2MI^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2\\
&= 2MI^2 + 2\times\frac{1}{4}AB^2\\
&= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.
\end{aligned}$$

III. 3. Ligne de niveau

Propriété 9

Pour tous points A, B et M du plan,

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

où I est le milieu de [AB].

Démonstration

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\
&= MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\
&= MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\
&= MI^2 + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\
&= MI^2 + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\
&= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2.
\end{aligned}$$

Propriété 10

Soient A et B deux points du plan.
L'ensemble des points M du plan qui vérifient l'égalité $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration

Soit I le milieu de [AB]
D'après la propriété 9, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ donc :

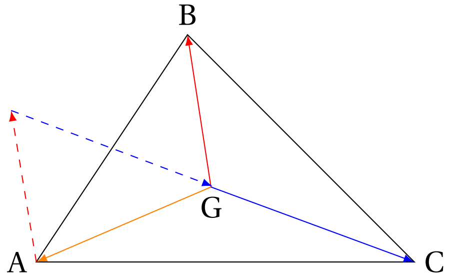
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 &\iff MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0\\
&\iff MI^2 = \frac{1}{4}AB^2\\
&\iff MI = \frac{1}{2}AB\\
&\iff \text{M appartient au cercle de centre I et de rayon } \frac{AB}{2}\\
&\iff \text{M appartient au cercle de diamètre [AB].}
\end{aligned}$$

III. 4. Centre de gravité d'un triangle

Définition 2

Soit ABC un triangle quelconque.
On appelle **centre de gravité** de ABC le point G tel que :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$



Lemme 3

Soient A, B et C trois points quelconques du plan.
Quel que soit le point M du plan,

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}.$$

Démonstration

Notons G le centre de gravité du triangle ABC.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}&=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)\\&=3\overrightarrow{MG}+\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{=\vec{0}\text{ par définition}}\\&=3\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

Propriété 11

Soient ABC un triangle quelconque du plan et G son centre de gravité.
Quel que soit le point M du plan,

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\\&=\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}^2\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)}_{=\vec{0}}\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2.\end{aligned}$$

Corollaire 1

Soient ABC un triangle quelconque du plan et G son centre de gravité.
Soit M un point quelconque du plan.

$MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimal lorsque $M = G$.

Démonstration

D'après la propriété 11,

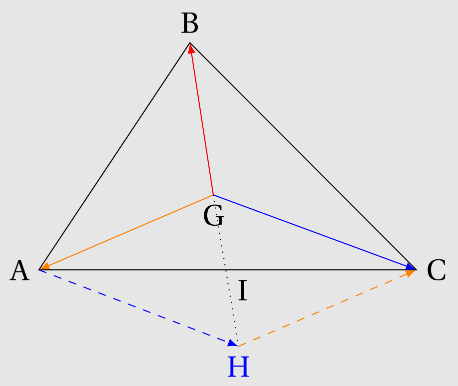
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Ainsi, $MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimal quand $3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ l'est aussi.
Or $GA^2 + GB^2 + GC^2$ est constant donc $3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ est minimal quand 3MG l'est aussi, c'est-à-dire quand $MG = 0$, soit quand $M = G$.

Propriété 12

Le centre de gravité d'une triangle est le point de concours de ses médianes.

Démonstration



Posons H tel que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{GC}$; ainsi, AGCH est un parallélogramme.
Posons I le milieu de [AC]. Ainsi,

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{GI}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \vec{0},$$

ce qui signifie que $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires et donc que les points B, G et I sont alignés.
On en déduit que G appartient à la médiane (BI).
Un raisonnement analogue peut ensuite démontrer que G appartient aux deux autres médianes.
Ainsi, G est le point d'intersection des médianes de ABC.

III. 5. Équation cartésienne de cercles

Dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, considérons deux points $A\left(x_A\,;y_B\right)$ et $B\left(x_B\,;y_B\right)$. Posons $I\,(a;b)$ le milieu de [AB].
Soit $M\left(x;y\right)$ un point du cercle de diamètre [AB]. D'après la propriété 10,

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0.$$

De plus,

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-x_B\\ y-y_B\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 &\iff \begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_B\\ y-y_B\end{pmatrix}=0\\ &\iff (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0\\ &\iff x^2-(x_A+x_B)x+x_Ax_B+y^2-(y_A+y_B)y+y_Ay_B=0\\ &\iff x^2-2\times\frac{x_A+x_B}{2}x+x_Ax_B+y^2-2\times\frac{y_A+y_B}{2}+y_Ay_B=0.\end{aligned}$$

Or,

$$x^2-2\times\frac{x_A+x_B}{2}x=\left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2-\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2=(x-a)^2-a^2$$

et

$$y^2-2\times\frac{y_A+y_B}{2}y=\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2-\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=(y-b)^2-b^2$$

donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 &\iff (x-a)^2-a^2+x_Ax_B+(y-b)^2-b^2+y_Ay_B=0\\ &\iff (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-x_Ax_B-y_Ay_B.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}a^2+b^2-x_Ax_B-y_Ay_B &= \left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2-x_Ax_B-y_Ay_B\\ &=\frac{x_A^2+2x_Ax_B+x_B^2}{4}+\frac{y_A^2+2y_Ay_B+y_B^2}{4}-\frac{4x_Ax_B}{4}-\frac{4y_Ay_B}{4}\\ &=\frac{x_A^2-2x_Ax_B+x_B^2+y_A^2-2y_Ay_B+y_B^2}{4}\\ &=\frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}{4}\\ &=\frac{AB^2}{4}.\end{aligned}$$

En convenant de noter $r=\dfrac{AB}{2}$ le rayon du cercle (de diamètre [AB]), on obtient ainsi :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \iff (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Cette dernière égalité est appelée une *équation cartésienne du cercle.*

Propriété 13

Soit $I\,(a;b)$ un point du plan rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
Une équation du cercle de centre I et de rayon r est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

III. 6. Vecteur normal d'une droite

Déf. 3

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

On appelle **vecteur normal** à $\mathscr{D}$ tout vecteur orthogonal au vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Propriété 14

Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Alors $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Démonstration

La droite $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. En posant $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=-b\times a+a\times b=0.$$

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. $\vec{n}$ est donc bien un vecteur normal à $\mathscr{D}$.