CHAPITRE 6

Vecteurs

Plan de ce chapitre

I. Introduction

I. 1. Définition

Définition 1

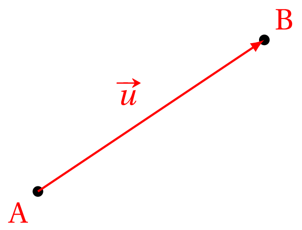
Un **vecteur** est la représentation graphique (à l'aide d'une flèche) d'un déplacement par translation.
Un vecteur est donc défini par :

- une direction (l'inclinaison de la flèche) ;
- un sens (vers la droite, vers la gauche, vers le haut, vers le bas) ;
- une norme (la longueur de la flèche).

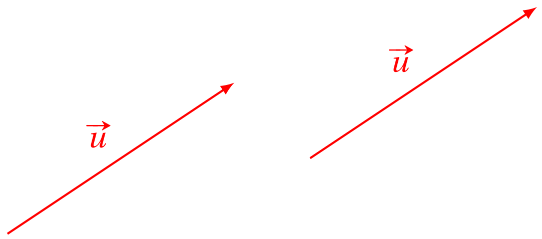
Il est noté par une lettre surmontée d'une flèche (toujours de la gauche vers la droite dans la notation).

Exemples 1

1. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ représente la translation qui transforme A en B.



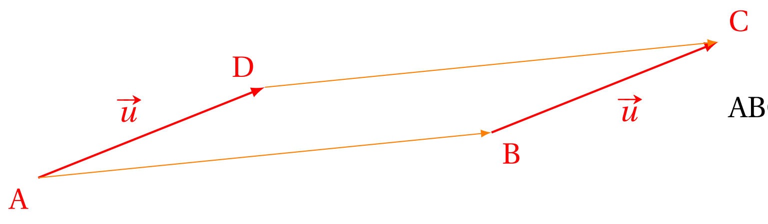
Remarque. Un même vecteur peut être représenté par plusieurs flèches identiques :



Propriété 1 (règle du parallélogramme)

Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Exemple 2



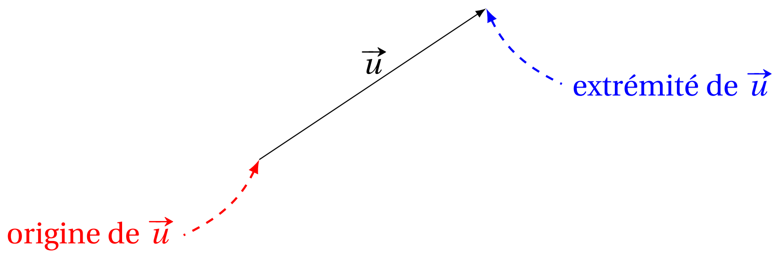
ABCD est un parallélogramme.

I. 2. Vocabulaire

Déf. 2

L'**origine** d'un vecteur est le point à partir duquel la flèche part.
L'**extrémité** d'un vecteur est le point où la flèche arrive.

Exemple 3



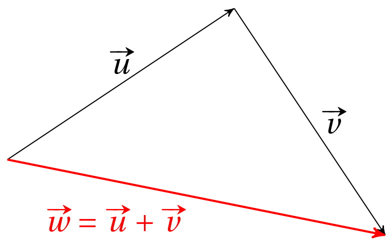
Remarque. Dans le cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, « A » (la première lettre) représente toujours l'origine et « B » (la seconde lettre) désigne toujours l'extrémité.

II. Opérations sur les vecteurs

II. 1. Somme de deux vecteurs

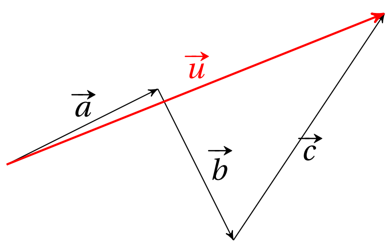
Définition 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On définit le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ de la façon suivante :



- on met « bout-à-bout » les vecteurs ;
- l'origine du vecteur-somme est celle du 1^{er} vecteur ;
- l'extrémité du vecteur-somme est celle du dernier vecteur.

Exemple 4 (somme de 3 vecteurs)



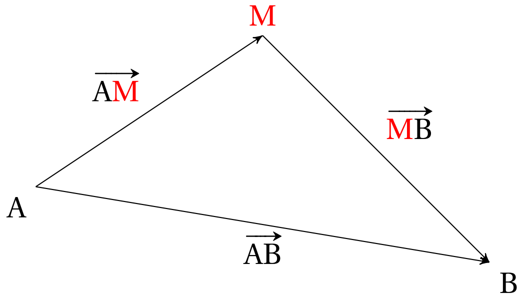
$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Propriété 2 (relation de Chasles)

Soient A, B et M trois points quelconques.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}.$$

Cette relation signifie que pour aller d'un point (A) à un autre (B), on peut partir du premier (A), puis passer par un autre (M) avant d'arriver au point final (B).



II. 2. Vecteur opposé

Définition 4

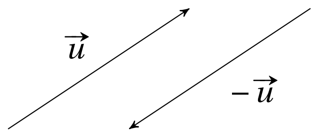
Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque.
On définit le vecteur $-\vec{u}$ comme étant le vecteur ayant :

- la même direction que $\vec{u}$;
- le sens contraire de $\vec{u}$;
- la même norme que $\vec{u}$.

Dans le cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, on a :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

Exemple 5



Déf.5

On définit le **vecteur nul** comme étant le vecteur de norme nulle. On le note $\vec{0}$.
Si un vecteur représente un déplacement, le vecteur nul représente, quant à lui, la stabilité : le « non déplacement ».

Remarque. Quel que soit le vecteur $\vec{u}$,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$$

II. 3. Produit d'un vecteur par un réel

Définition 6

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque et k un nombre réel non nul.

- Si $k > 0$, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ comme étant le vecteur somme :

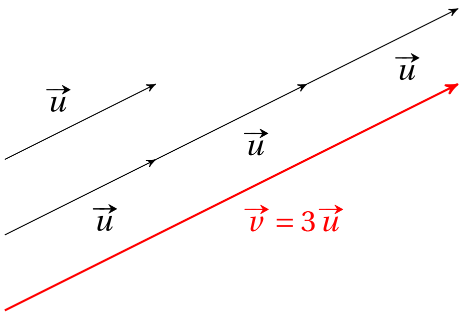
$$\vec{v} = \underbrace{\vec{u} + \vec{u} + \cdots + \vec{u}}_{k \text{ fois}}.$$

- Si $k < 0$, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ comme étant le vecteur somme :

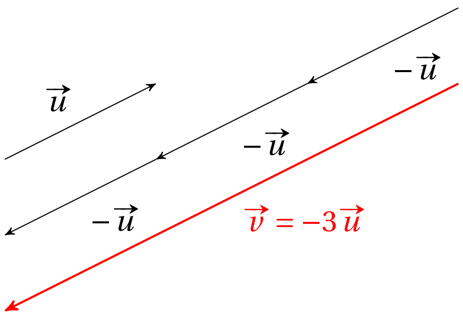
$$\vec{v} = \underbrace{(-\vec{u}) + (-\vec{u}) + \cdots + (-\vec{u})}_{k \text{ fois}}.$$

Exemples 6

1. $k > 0$:



2. $k < 0$:



Déf. 7

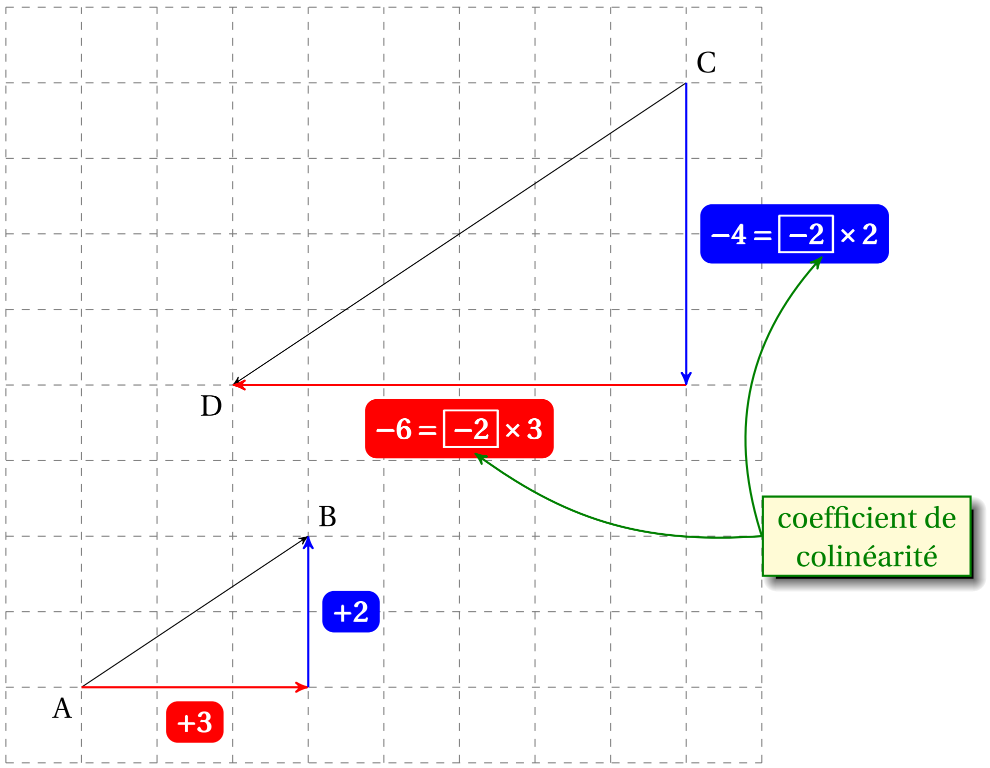
Deux vecteurs sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.
On peut écrire cette définition de la façon suivante :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff \exists\ k \in \mathbb{R}^*,\ \vec{u} = k\vec{v}.$$

Attention

On ne dit pas que deux vecteurs sont parallèles.
Le terme « parallèle » est uniquement utilisé pour des droites ou des segments, voire éventuellement des courbes, mais pas pour des vecteurs.
Si deux vecteurs sont colinéaires, on pourra dire que leur *support* (les droites qui les supportent) sont parallèles.

Exemple 7



À l'aide du quadrillage, on peut remarquer ici que $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 3 (alignement de trois points)

Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignés.

III. Dans un repère

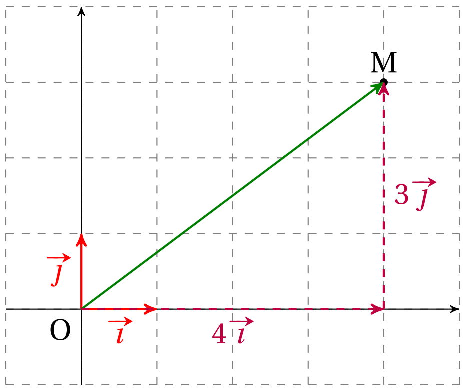
III. 1. Introduction

Définitions 8

- On considère un repère (O ;I,J).
  On appelle **vecteurs unitaires** de ce repère les vecteurs :
  $$\vec{\imath} = \overrightarrow{OI} \qquad \text{et} \qquad \vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}.$$
  Le repère est alors noté : $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
- On considère un point $M\left(x; y\right)$ dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
  Alors,
  $$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

Exemple 8

On considère le point M(4;3) :



Remarque. Le repère utilisé dans l'exemple est orthonormé (axes perpendiculaires – *ortho* – et mêmes unités sur les axes – *normé*), mais le résultat est valable quel que soit le repère utilisé.

III. 2. Coordonnées d'un vecteur

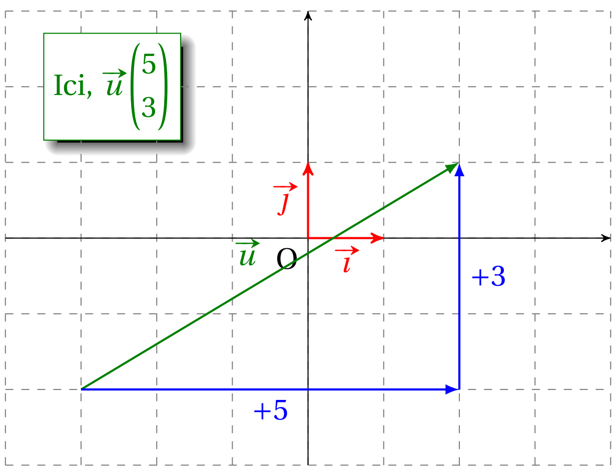
Définition 9

On considère un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont notées ainsi :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où x représente la dénivellation relative en abscisses et y celle en ordonnées pour passer de A à B.

Exemple 9



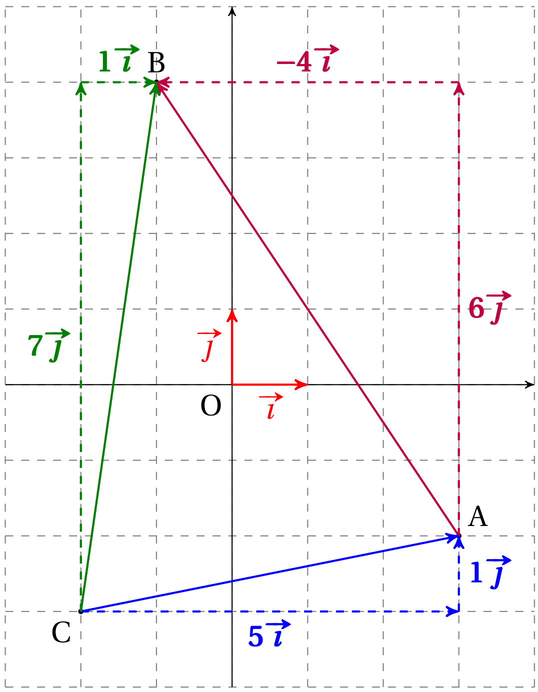
Propriété 4

En posant $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, on a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Exemple 10

On considère les points $A(3\,;-2)$, $B(-1\,;4)$ et $C(-2\,;-3)$ dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-3 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$
- $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ -2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 4-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Propriété 5

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- Le vecteur-somme $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

- Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Alors, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées :

$$k\vec{u}\begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix}.$$

Exemple 11

On pose $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

- $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{w}\begin{pmatrix}-1+3\\2+(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
- $-3\vec{u}\begin{pmatrix}-3\times(-1)\\-3\times 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$.

III. 3. Vecteurs colinéaires

Propriété 6

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$xy' = x'y.$$

Exemple 12

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$.

On a d'une part :

$$xy' = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2-1 = 1$$

et d'autre part :

$$x'y = 1\times 1.$$

Donc $xy' = x'y$.
Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan rapportés à un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  Alors, il existe un réel non nul k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, et donc :

  $$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

  Ainsi,

  $$xy' = x\times ky = k(xy) \qquad \text{et} \qquad x'y = kx\times y = k(xy).$$

  Donc $xy' = x'y$.

Démonstration – Suite

- Supposons maintenant que $xy' = x'y$.
  Alors,
  - si x' et y' sont tous deux différents de 0,
  $$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}.$$
  Notons $\lambda = \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$. On a donc :
  $$x = \lambda x' \qquad \text{et} \qquad y = \lambda y'.$$
  Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x' \\ \lambda y'\end{pmatrix}$, soit $\vec{u} = \lambda \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires ;
  - si $x' = 0$ et $y' \neq 0$ alors :
  $xy' = x'y \iff xy' = 0 \iff x = 0$ ou $y' = 0$ (ce qui est impossible par hypothèse).
  Donc $x = 0$ et on a donc $\vec{u}\begin{pmatrix}0 \\ y\end{pmatrix}$ et $\vec{y}\begin{pmatrix}0 \\ y'\end{pmatrix}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires car il existe toujours un réel k tel que $y' = ky$.
  - si $x' \neq 0$ et $y' = 0$ alors, avec un raisonnement analogue, on obtient que $\vec{u}\begin{pmatrix}x \\ 0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x' \\ 0\end{pmatrix}$. Ainsi, les deux vecteurs sont colinéaires ;
  - si $x' = y' = 0$ alors x et y peuvent être quelconques, l'égalité $xy' = x'y$ est toujours vraie. Dans ce cas, $\vec{v}\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$ est le vecteur nul, et il est alors colinéaires à $\vec{u}$ car le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.