CHAPITRE 7

Équations cartésiennes de droites

Plan de ce chapitre

I. Introduction

Dans ce chapitre, le plan est rapporté à un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

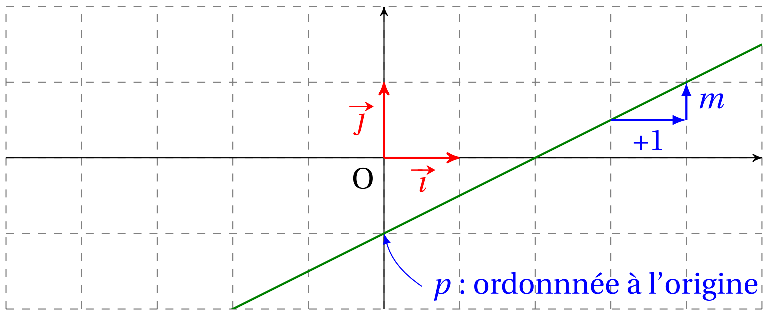
I. 1. Équation réduite d'une droite

Définitions 1

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan. On appelle **équation réduite** de $\mathscr{D}$ l'égalité :

$$y = mx + p \qquad , \qquad m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}$$

où $M(x;y)$ est un point quelconque de $\mathscr{D}$.
m est appelé le **coefficient directeur** de $\mathscr{D}$; on l'appelle aussi la **pente** de la droite.
p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de $\mathscr{D}$; c'est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de l'axe des ordonnées.



Propriété 1

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan. L'équation de la droite (AB) est $y = mx+p$, où :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

et

$$p = y_A - mx_A = y_B - mx_B.$$

Exemple 1

Soient $A(-1;-3)$ et $B(3;5)$. Alors, l'équation réduite de (AB) est $y = mx + p$ où :

$$m = \frac{5-(-3)}{3-(-1)} = \frac{8}{4} = 2$$

et

$$p = y_B - mx_B = 5 - 2 \times 3 = -1.$$

Ainsi, l'équation réduite de (AB) est : $y = 2x - 1$.

Remarques.

- si $m = 0$ alors la droite est horizontale.
- si $p = 0$ alors la droite passe par l'origine du repère.

I. 2. Équation cartésienne d'une droite

Définition 2

Une **équation cartésienne de droite** est une équation de la forme :

$$ax+by+c=0$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

Exemples 2

1. $3x-5y+2=0$ est une équation cartésienne d'une droite, où $a=3$, $b=-5$ et $c=2$.
2. $-4y+7=0$ est une équation cartésienne d'une droite, où $a=0$, $b=-4$ et $c=7$.
3. $3x+1=0$ est une équation cartésienne d'une droite, où $a=3$, $b=0$ et $c=1$.

Attention

Une équation cartésienne n'est pas unique (d'où l'article « une »).
En effet, si on considère l'équation $x+y+1=0$, elle est équivalente à l'équation $2x+2y+2=0$ (on a multiplié par 2 les deux membres de la première équation).
Ainsi, une droite admet une infinité d'équations cartésiennes, contrairement au fait qu'elle admet une unique équation réduite.

I. 3. Interprétation d'une équation de droite

Qu'elle soit réduite ou cartésienne, une équation de droite représente toujours un lien entre les abscisses et les ordonnées des points de cette droite.

- En écrivant $y=mx+p$, on signifie que l'ordonnée de n'importe quel point de la droite est toujours égal à son abscisse multipliée par m augmenté de p.

  Ainsi, si on connaît l'abscisse d'un point de la droite, on peut connaître son ordonnée, et réciproquement.
- En écrivant $ax+by+c=0$, on signifie que quel que soit le point $\mathrm{M}(x\,;y)$ sur la droite, on a nécessairement l'égalité $ax+by+c=0$.

On décrit ainsi, à l'aide d'une égalité (algébrique), un ensemble (géométrique).

C'est le français René Descartes qui, au XVII^{e} siècle, fait le lien entre la géométrie et l'algèbre.

II. Établir une équation cartésienne d'une droite

Il existe deux façons principales d'obtenir une équation cartésienne d'une droite : à partir de son équation réduite ou à l'aide de vecteurs.

II. 1. À partir de l'équation réduite

L'équation réduite d'une droite étant de la forme $y = mx + p$, en se ramenant à une équation de la forme $\mathrm{E}(x, y) = 0$, on arrive à :

$$mx - y + p = 0.$$

Exemple 3

Soient $\mathrm{A}(-1\,;-3)$ et $\mathrm{B}(3\,;5)$. Alors, l'équation réduite de (AB) est :

$$y = 2x - 1$$

d'après l'exemple 1.
Une équation cartésienne de (AB) est donc :

$$2x - y - 1 = 0.$$

II. 2. À l'aide de vecteurs

Considérons deux points $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}}\,; y_{\mathrm{A}}\right)$ et $\mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}}\,; y_{\mathrm{B}}\right)$, ainsi qu'un point $\mathrm{M}\left(x\,; y\right)$ sur (AB), où :

- $x_{\mathrm{A}},\ y_{\mathrm{A}},\ x_{\mathrm{B}},\ y_{\mathrm{B}}$ sont quatre réels fixés ;
- x et y sont deux réels variables (dont les valeurs peuvent changer).

Dire que M appartient à (AB) signifie que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ sont colinéaires.
Or, vous avez vu en classe de Seconde que deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.
Nous avons ainsi un moyen de passer de la géométrie (colinéarité) à l'algèbre (égalité), ce qui signifie que nous pouvons établir une équation cartésienne.

Exemple 4

Soient $\mathrm{A}(-2\,;5)$ et $\mathrm{B}(5\,;-1)$. Posons alors $\mathrm{M}\left(x\,; y\right) \in (\mathrm{AB})$.
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-5 \end{pmatrix}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ sont colinéaires} &\iff 7(y-2) - (-6)(x+2) = 0 \\
&\iff 7y - 14 + 6x + 12 = 0 \\
&\iff 6x + 7y - 2 = 0.
\end{aligned}$$

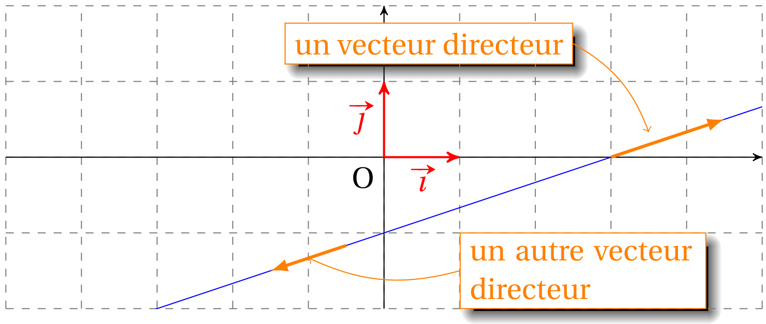
Une équation cartésienne de (AB) est donc $6x + 7y - 2 = 0$.

III. Vecteur directeur d'une droite

III. 1. Définition

Déf. 3 Un **vecteur directeur** d'une droite est un vecteur dont la direction est la même que celle de la droite.

Exemple 5



III. 2. Lien entre vecteur directeur et équations de droite

III. 2. a. Équation réduite

Propriété 2

Soit (d) une droite d'équation réduite $y = mx + p$.

Alors $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

Démonstration

Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$ un point de (d).
Cherchons les coordonnées du point B dont l'abscisse vaut $x_\mathrm{B} = x_\mathrm{A} + 1$:

$$y_\mathrm{B} = mx_\mathrm{B} + p = m(x_\mathrm{A}+1) + p = mx_\mathrm{A} + p + m = y_\mathrm{A} + m.$$

D'où $\mathrm{B}(x_\mathrm{A}+1\,;y_\mathrm{A}+m)$.

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}\\y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x_\mathrm{A}+1)-x_\mathrm{A}\\(y_\mathrm{A}+m)-y_\mathrm{A}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est un vecteur directeur de (d) car A et B sont sur (d).

Donc le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

III. 2. b. Équation cartésienne

Propriété 3

Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

Démonstration

$ax+by+c=0 \iff y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$.
Ainsi, l'équation réduite de (d) est : $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$, où $-\dfrac{a}{b}$ est le coefficient directeur.

D'après la propriété 2, le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), comme tout vecteur colinéaire à $\vec{v}$.
Ainsi, $\vec{u}=-b\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d). Or, $-b\vec{v}\begin{pmatrix}-b\times 1\\-b\times(-\frac{a}{b})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

IV. Intersection de droites

IV. 1. Critère d'existence

Par définition, deux droites sécantes sont deux droites qui ne sont pas parallèles.
Ainsi, l'intersection de deux droites existe quand leur vecteur directeur ne sont pas parallèles.

Propriété 4

Soient (d) et (d') deux droites d'équations cartésiennes respectives :

$$ax+by+c=0 \qquad \text{et} \qquad a'x+b'y+c'=0.$$

$$(d) \text{ et } (d') \text{ sont parallèles} \iff ab'=ba'$$

Démonstration

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de (d) et (d').

$$\begin{aligned}\vec{u} \text{ et } \vec{u'} \text{ colinéaires} &\iff -b\times a'-a\times(-b')=0\\ &\iff -ba'+ab'=0\\ &\iff ab'=ba'.\end{aligned}$$

Exemple 6

$(d) : -3x+5y-2=0$
$(d') : 8x+3y+1=0$

$-3\times3=-9$ et $8\times5=40\neq-9$, donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.

IV. 2. Méthodes

IV. 2. a. Avec les équations réduites

Soient $(d)\ :\ y=mx+p$ et $(d')\ :\ y=m'x+p'$. On suppose que $m\neq m'$, ce qui signifie que les deux droites sont sécantes.
Pour trouver les coordonnées du point d'intersection des deux droites, on recherche d'abord son abscisse en résolvant l'équation :

$$mx+p=m'x+p'$$

puis on remplace x dans l'équation $y=mx+p$ par la valeur trouvée.

Exemple 7

$(d) : y=-5x+2$
$(d') : y=3x+10$

$$-5x+2=3x+10 \iff 8x=8 \iff x=1.$$

On remplace x par 1 dans l'équation $y=-5x+2$: $y=-5\times1+2=-3$.

Les coordonnées du point d'intersection sont donc $(1\,;-3)$.

IV. 2. b. Avec les équations cartésiennes

On peut certes se ramener aux équations réduites, mais on peut aussi faire autrement.
Chercher les coordonnées du point d'intersection de deux droites d'équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} ax+\ by+\ c=0 & \mathrm{L}_1\\ a'x+b'y+c'=0 & \mathrm{L}_2\end{cases}$$

On note L_1 la première ligne du système et L_2 la seconde.
Nous avons le droit de multiplier les équations par n'importe quel nombre non nul. Par conséquent, on peut multiplier L_1 par a' et L_2 par a afin de faire apparaître le même coefficient devant x dans chacune des équations. On notera alors :

$$\begin{cases} aa'x+ba'y+ca'=0 & \mathrm{L}_1\longleftarrow a'\mathrm{L}_1\\ aa'x+ab'y+ac'=0 & \mathrm{L}_2\longleftarrow a\mathrm{L}_2\end{cases}$$

Ainsi, en faisant par exemple $\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2$, on se retrouve avec une équation d'inconnue y :

$$\begin{cases} aa'x+\ ba'y+\qquad\qquad ca'=0 & \mathrm{L}_1\longleftarrow \mathrm{L}_1\\ \qquad -ab')y+(ba'+(ca'-ac')=0 & \mathrm{L}_2\longleftarrow \mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2\end{cases}$$

On peut alors trouver y, puis x à l'aide de l'une des deux équations du début.

Exemple 8

$$\begin{cases} 3x - 5y - 1 = 0 & L_1 \\ -7x + 15y + 1 = 0 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 9x - 15y - 3 = 0 & L_1 \longleftarrow 3L_1 \\ -7x + 15y + 1 = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 9x - 15y - 3 = 0 & L_1 \longleftarrow 3L_1 \\ 2x \qquad\quad - 2 = 0 & L_2 \longleftarrow L_1 + L_2 \end{cases}$$

$L_2 \iff x = 1$ et donc, en prenant l'équation $3x - 5y - 1 = 0$ et en remplaçant x par 1, on obtient $3 - 5y - 1 = 0$, soit $y = \dfrac{2}{5}$.

Le point d'intersection des deux droites a pour coordonnées $\left(1\,;\dfrac{2}{5}\right)$.

Remarque. On peut bien sûr choisir d'éliminer l'inconnue que l'on veut : soit x, soit y (comme dans l'exemple).