CHAPITRE 7

Probabilités conditionnelles

Plan de ce chapitre

I. Probabilités conditionnelles **2**
I. 1. Définition 2
I. 2. Événement contraire 3
I. 3. Partition de l'univers 3
II. Probabilités totales **4**
II. 1. Version light de la formule des probabilités totales 4
II. 2. Formule des probabilités totales 4
III. Indépendance **5**
IV. Succession de deux épreuves indépendantes **7**

I. Probabilités conditionnelles

I. 1. Définition

Définition 1

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.
On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé** le nombre noté $P_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Propriété 1

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

Démonstration

Elle découle de la définition : l'égalité des produits en croix mène à la propriété.

Exemple 1

Dans une urne, on place 10 boules, 3 noires et 7 rouges. On tire au hasard 3 boules, successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?

En notant :

- N_1 l'événement « la boule tirée est noire au 1^er^ tirage »,
- N_2 l'événement « la boule tirée est noire au 2^e^ tirage »,

la probabilité demandée est $P(N_1 \cap N_2)$.

- $P(N_1) = \dfrac{3}{10}$ car il y a 3 boules noires sur 10 lors du 1^er^ tirage ;
- $P_{N_1}(N_2) = \dfrac{2}{9}$ car il ne reste plus que 2 boules noires sur 9 au 2^e^ tirage si l'on sait que l'on a déjà tiré une boule noire au 1^er^ tirage.

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap N_2) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

I. 2. Événement contraire

Propriété 2

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B).$$

Démonstration

Par définition,

$$P_A\left(\overline{B}\right) = \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P(A)}.$$

Or,

$$P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right),$$

d'où :

$$\begin{aligned} P_A\left(\overline{B}\right) &= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= 1 - P_A(B). \end{aligned}$$

I. 3. Partition de l'univers

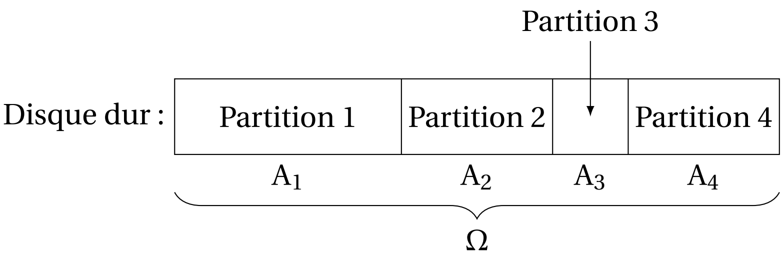
Déf. 2

On dit que les n événements $A_1, \ldots, A_n$ forment une **partition** de Ω si :

- tous les événements sont incompatibles deux à deux : $A_i \cap A_j = \varnothing$, pour tout $i \neq j$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Remarques.

- A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, quel que soit l'événement A.
- La notion de partition est similaire en informatique : un espace de stockage peut être découpé en plusieurs partitions :



II. Probabilités totales

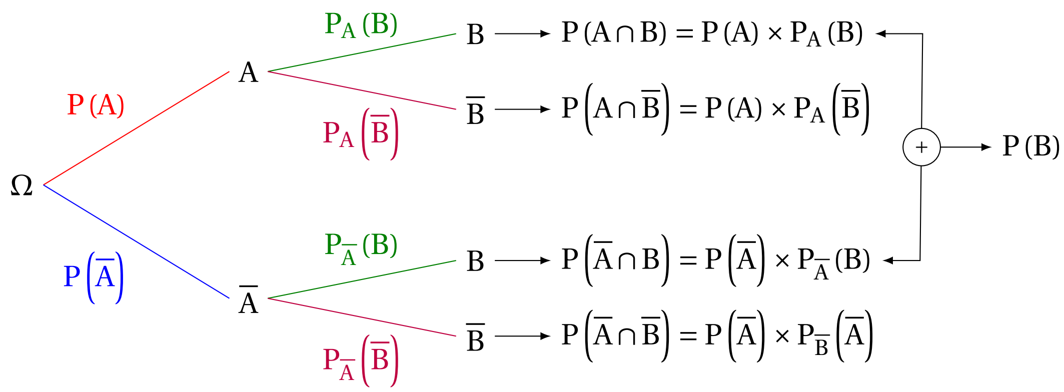
II. 1. Version light de la formule des probabilités totales

Propriété 3

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right).$$

On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités :



II. 2. Formule des probabilités totales

Propriété 4

Soient A_1, A_2, ..., A_n n événements formant une partition de l'univers, avec $P(A_k) \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors, pour tout événement B,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B).$$

Démonstration

Les événements $A_k \cap B$ sont incompatibles deux à deux.
De plus,

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots (A_n \cap B).$$

Donc,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B).$$

Exemple 2

Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines. Toutes les pièces sont vérifiées par le service qualité. Ce service a fourni le tableau suivant après une journée de production.

N° de la machine utilisée	1	2	3
Pourcentage de pièces produites	50	35	15
Fréquence des défauts par machine	0,01	0,02	0,06

On prend au hasard une pièce produite dans la journée.
Déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

On convient de noter :

- M_k l'événement : « La pièce provient de la machine n° k » ;
- D l'événement : « La pièce est défectueuse ».

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D\cap M_1) + P(D\cap M_2) + P(D\cap M_3) \\ &= P(M_1)\times P_{M_1}(D) + P(M_2)\times P_{M_2}(D) + P(M_3)\times P_{M_3}(D) \\ &= 0,5\times 0,01 + 0,35\times 0,02 + 0,15\times 0,06 \\ &= 0{,}021\ 2. \end{aligned}$$

III. Indépendance

Propriété 5

Soient A et B deux événements tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$. Alors,

$$P_B(A) = P(A) \Longleftrightarrow P_A(B) = P(B).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} P_B(A) = P(A) &\Longleftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \\ &\Longleftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B) \\ &\Longleftrightarrow P_A(B) = P(B). \end{aligned}$$

Déf.3

Soient A et B deux événements tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$.
On dits que A et B sont **indépendants** quand $P_B(A) = P(A)$.

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre.

Propriété 6

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) &\iff \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \\ &\iff \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}).\end{aligned}$$

Exemple 3

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
On considère les événements :

- A : « Tirer un cœur » ;
- B : « Tirer un roi ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

On a :

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{4}$ car il y a 8 cœurs sur les 32 cartes en tout ;
- $\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{1}{4}$ car, sachant que la carte est un roi, il n'y a qu'une seule carte portant un cœur sur les 4 rois.

On a alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$, ce qui signifie que A et B sont indépendants.

Propriété 7

Soient A et B deux événements indépendants.
Alors, A et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants.

Démonstration

On sait que :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = 1 - \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}).$$

Or,

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})$$

car les événements A et B sont indépendants.
D'où :

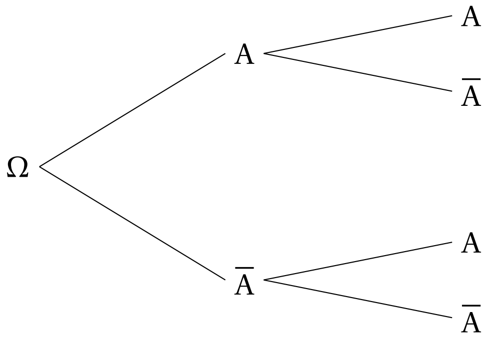
$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{B}}\right),$$

ce qui signifie que A et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants.

Remarque. Deux événements A et B incompatibles tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ ne sont pas indépendants.
En effet, A et B incompatibles signifie d'une part que $P(A) \times P(B) \neq 0$, d'autre part que $P(A \cap B) = 0$.
Ainsi, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$; les événements ne sont donc pas indépendants.

IV. Succession de deux épreuves indépendantes

Imaginons une expérience à 2 issues (A et $\overline{A}$ par exemple) que l'on répète deux fois de façon indépendante.
Alors, la situation peut se représenter par l'arbre suivant :



Ainsi,

- la probabilité d'obtenir deux fois l'événement A est $P(A)^2$;
- la probabilité d'obtenir une seule fois l'événement A est $P\left(A \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{A} \cap A\right) = 2P\left(A \cap \overline{A}\right)$;
- la probabilité de ne pas obtenir l'événement A est $P\left(\overline{A}\right)^2$.

Exemple 4

On lance un dé cubique équilibré deux fois de suite, en considérant que les lancers sont indépendants.
On pose A : « Obtenir un multiple de 3. » Ainsi, $P(A) = \frac{1}{3}$.
La probabilité d'obtenir un multiple de 3 une seule fois sur les deux lancers est :

$$2P\left(A \cap \overline{A}\right) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$