CHAPITRE 8

# Fonctions de référence

## Plan de ce chapitre


**I. La fonction carré** . . . . . **2**
- I. 1. Définition . . . . . 2
- I. 2. Courbe représentative . . . . . 2
- I. 3. Sens de variation . . . . . 3
- I. 4. Équations . . . . . 3
- I. 5. Inéquations . . . . . 4

**II. La fonction inverse** . . . . . **6**
- II. 1. Définition . . . . . 6
- II. 2. Sens de variation . . . . . 6
- II. 3. Courbe représentative . . . . . 7
- II. 4. Équations . . . . . 7
- II. 5. Inéquations . . . . . 8

**III. La fonction cube** . . . . . **10**
- III. 1. Définition . . . . . 10
- III. 2. Sens de variation . . . . . 10
- III. 3. Courbe représentative . . . . . 10
- III. 4. Équations & inéquations . . . . . 12

**IV. Racine carrée** . . . . . **12**
- IV. 1. Définition . . . . . 12
- IV. 2. Sens de variation . . . . . 12
- IV. 3. Courbe représentative . . . . . 13
- IV. 4. Équations & inéquations . . . . . 13

**V. Généralités sur les fonctions de référence** . . . . . **14**
- V. 1. Ordre des images . . . . . 14
- V. 2. Position relative des courbes . . . . . 14

# I. La fonction carré

## I. 1. Définition

**Déf. 1** La fonction carré est la fonction qui à tout réel $x$ associe son carré $x^2$.
On la note :

$$x \longmapsto x^2.$$

**Propriété 1**

La fonction carré est paire.

**Démonstration**

Posons $f(x) = x^2$.
$f$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble centré en 0.
De plus, pour tout réel $x$,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\,,$$

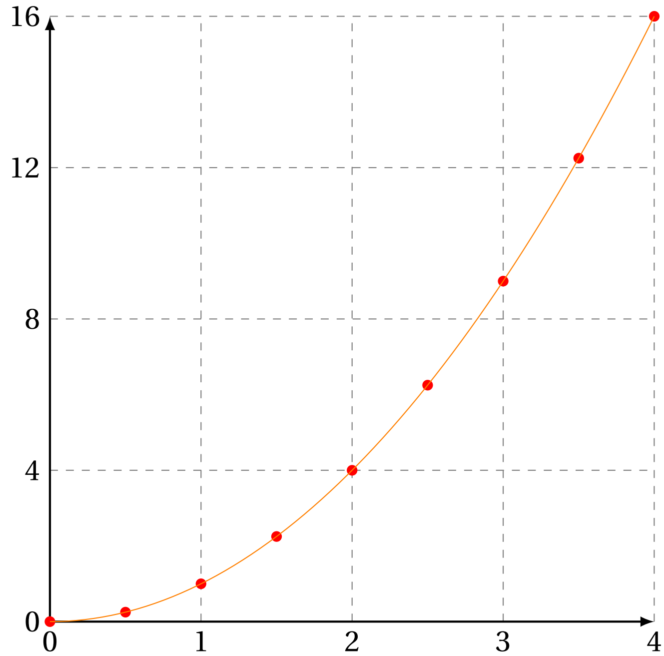
ce qui justifie que $f$ est paire.

## I. 2. Courbe représentative

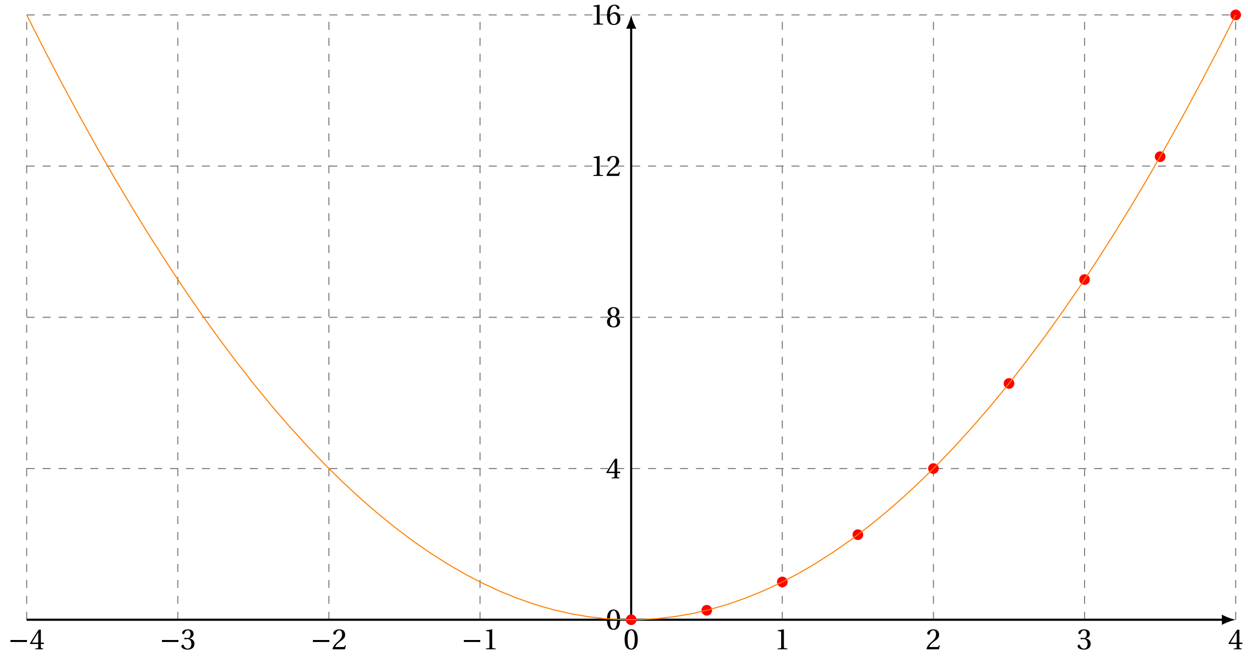
Afin de tracer la courbe représentative de la fonction carré sur un intervalle $[-4;4]$ par exemple, on peut avant tout souhaiter la tracer sur l'intervalle $[0;4]$ car la fonction est paire (ce qui signifie que la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, d'où le fait de tracer la courbe uniquement sur $[0;4]$).

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 | 12,25 | 16 |

On obtient alors :



Par symétrie, on obtient la courbe représentative complète sur $[-4;4]$ :




On dit que cette courbe est une *parabole*.

## I. 3. Sens de variation

On peut bien entendu voir sur le graphique les variations de la fonction carré, mais on aurait pu aussi trouver les variations avant de construire la courbe.
Pour cela, on aurait pu prendre deux nombres $a$ et $b$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$, et comparer $a^2$ et $b^2$ :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant a < b &\iff a^2 - b^2 = \underbrace{(a-b)}_{<0}\underbrace{(a+b)}_{>0} \\ &\iff a^2 < b^2 \\ &\iff \text{la fonction carré est strictement croissante sur } [0;+\infty[. \end{aligned}$$

Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on peut en déduire que la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
Le tableau de variation de la fonction carré sur $\mathbb{R}$ est donc le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x \mapsto x^2$ | ↘ | $0$ | ↗ |

## I. 4. Équations

**Propriété 2**

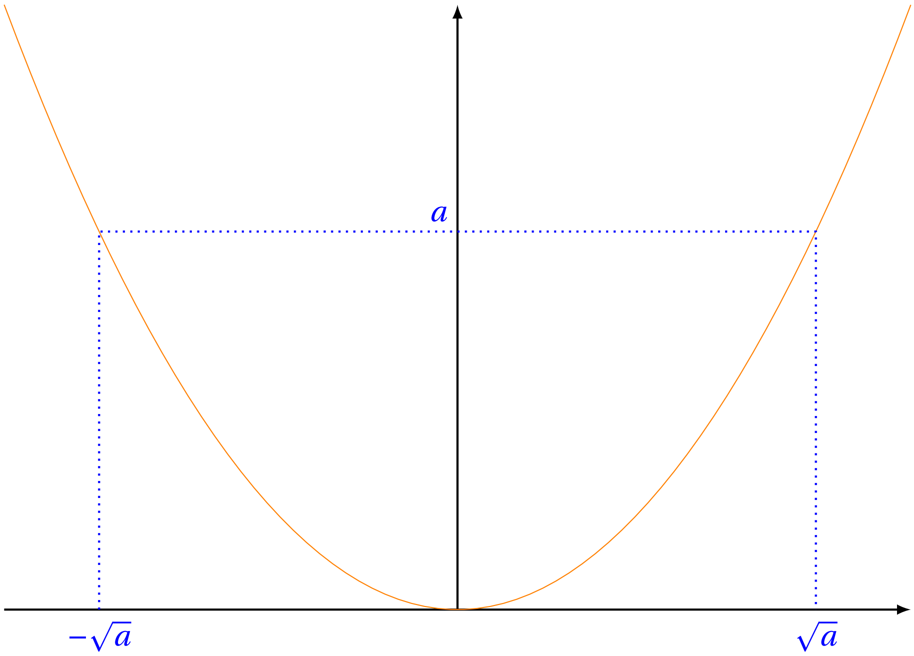
Pour tout nombre $a > 0$,

$$x^2 = a \iff x = -\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{a}.$$

**Exemples 1**

1. $x^2 = 7 \iff x = -\sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{7}$.
2. $x^2 = 16 \iff x = -\sqrt{16} = -4 \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{16} = 4$.

Graphiquement, cela revient à trouver les antécédents du nombre $a$ par la fonction carré :




## I. 5. Inéquations

**Propriété 3**

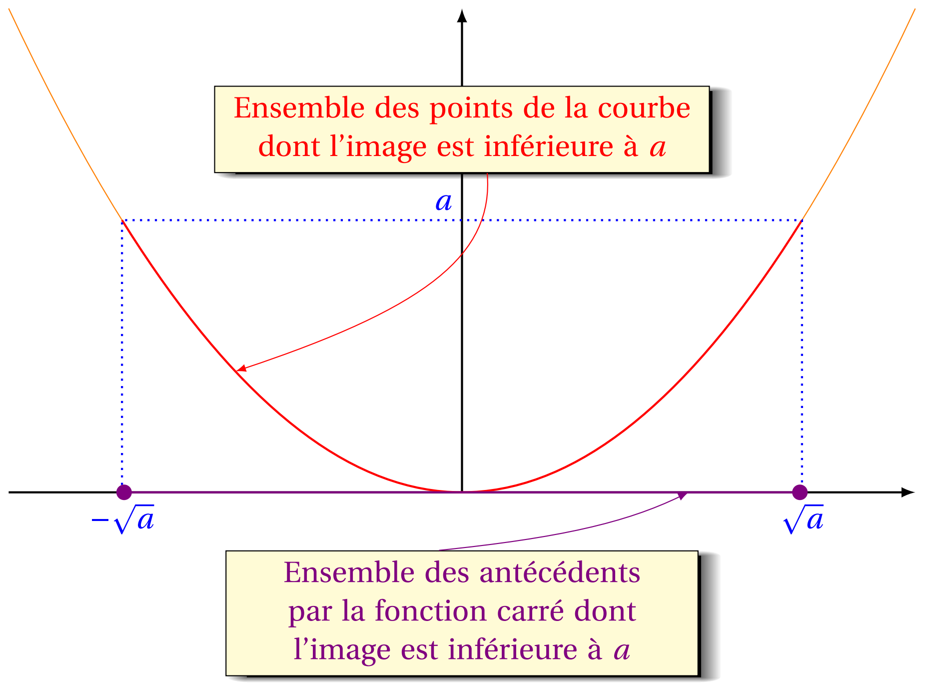
Pour tout nombres $a > 0$,

$$x^2 < a \iff -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}.$$

**Exemple 2**

$$x^2 < 9 \iff -3 < x < 3.$$

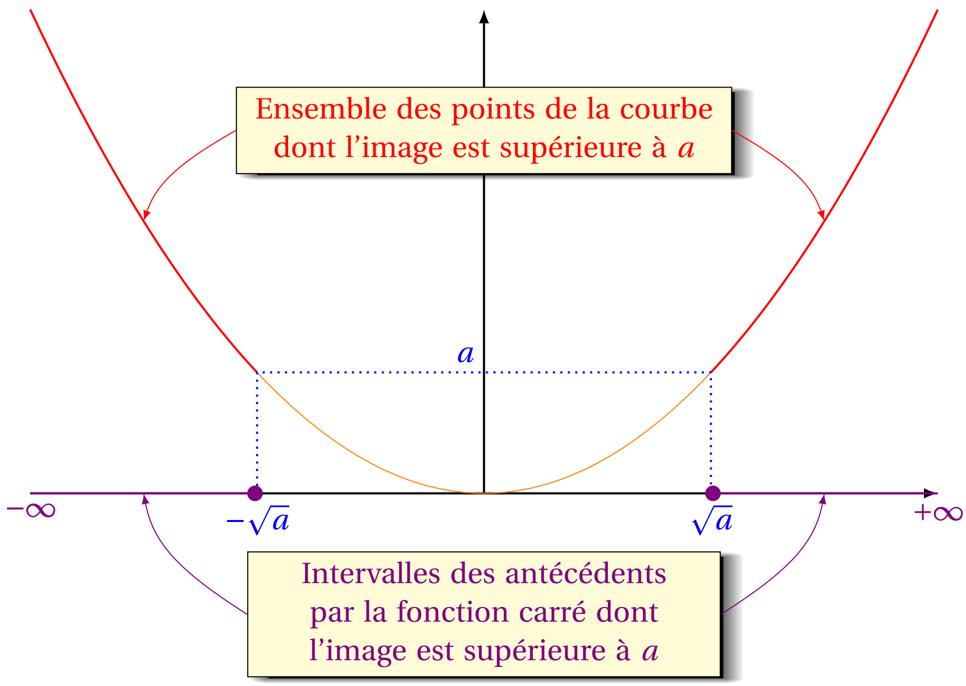
Graphiquement, cela revient à trouver tous les antécédents dont l'image est plus petite que 9 par la fonction carré :




**Propriété 4**

Pour tout réel $a > 0$,

$$x^2 > a \iff x \in \left]-\infty; -\sqrt{a}\right[ \cup \left]\sqrt{a}; +\infty\right[.$$



# II. La fonction inverse

## II. 1. Définition

**Déf. 2**

La fonction inverse est la fonction qui à tout réel $x$ associe son inverse $\frac{1}{x}$.
On la note :

$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

**Propriété 5**

La fonction carré est impaire.

**Démonstration**

Posons $f(x) = \frac{1}{x}$.
$f$ est définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, ensemble centré en 0.
De plus, pour tout réel $x$,

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x),$$

ce qui justifie que $f$ est impaire.

## II. 2. Sens de variation

Soient deux nombres $a$ et $b$ tels que $a < b$. Posons $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ &= \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} \\ &= \frac{b-a}{ab}. \end{aligned}$$

- Si on se place sur $]-\infty;0[$ alors $a < 0$ et $b < 0$ donc $a$ et $b$ sont de même signe, ce qui signifie que $ab > 0$.
- Si on se place sur $]0;+\infty[$ alors $a > 0$ et $b > 0$ donc $a$ et $b$ sont aussi de même signe, ce qui signifie que $ab > 0$.

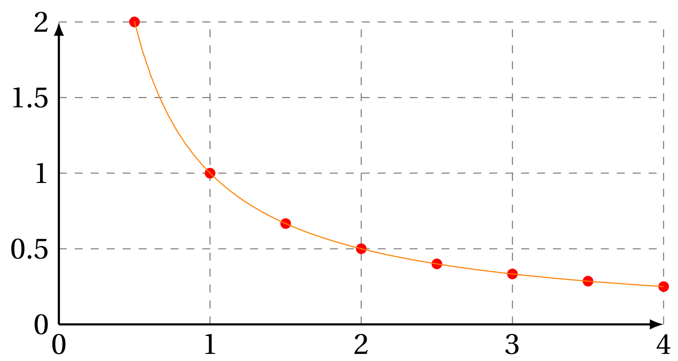
De plus, $a < b$ donc $b - a > 0$. Ainsi, $f(a) - f(b) > 0$, ce qui signifie que $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

## II. 3. Courbe représentative

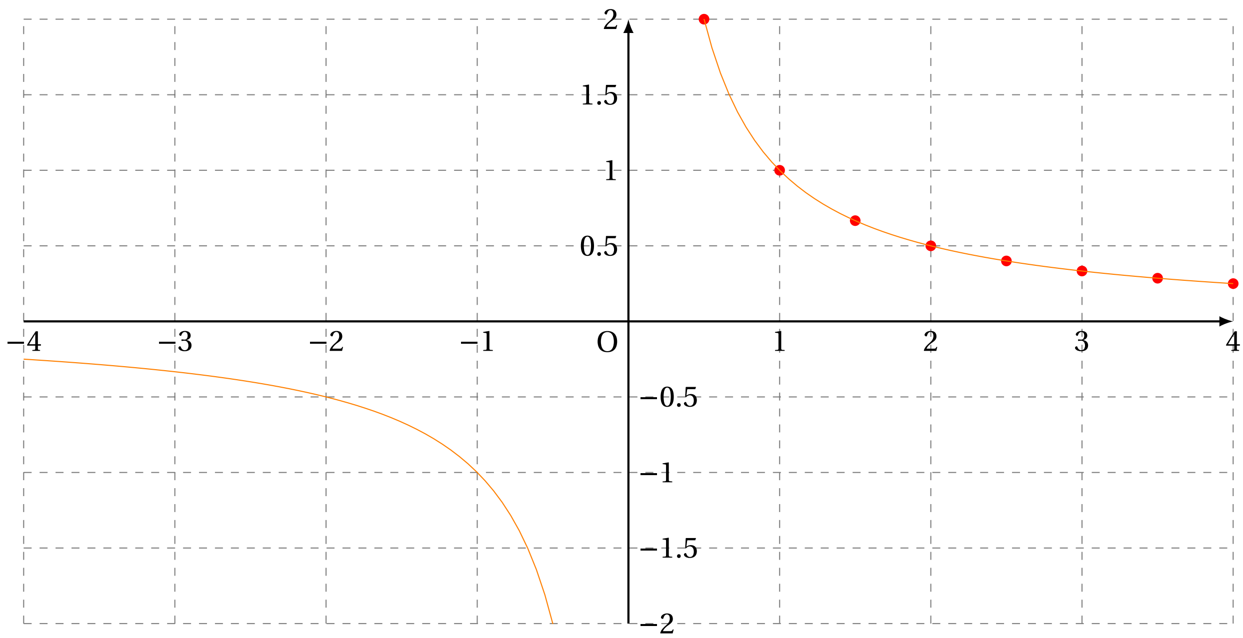
Afin de tracer la courbe représentative de la fonction inverse sur un intervalle $[-4;0[\cup]0;4]$ par exemple, on peut avant tout souhaiter la tracer sur l'intervalle $]0;4]$ car la fonction est impaire (ce qui signifie que la courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère, d'où le fait de tracer la courbe uniquement sur $]0;4]$).

| $x$ | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 2 | 1 | 0,66 | 0,5 | 0,4 | 0,33 | 0,29 | 0,25 |

On obtient alors :




Par symétrie par rapport à O, on obtient la courbe représentative complète sur $[-4;4]$ :




On dit que cette courbe est une *hyperbole*.

## II. 4. Équations

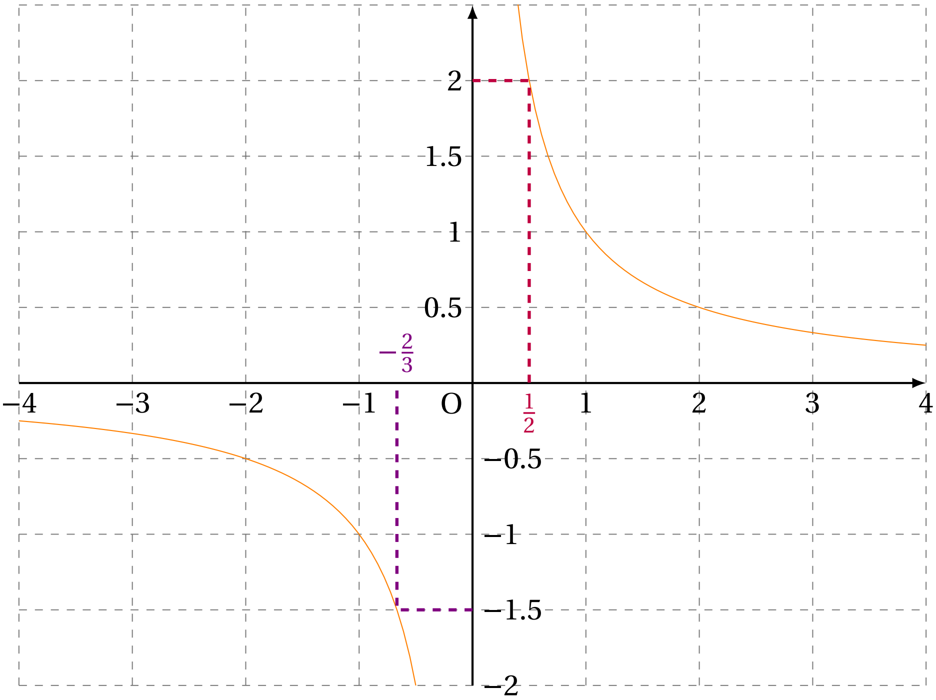
**Propriété 6**

Pour tout nombre $a \neq 0$,

$$\frac{1}{x} = a \iff x = \frac{1}{a}.$$

**Exemples 3**

1. $\dfrac{1}{x} = 2 \iff x = \dfrac{1}{2}$.
2. $\dfrac{1}{x} = -1,5 \iff x = \dfrac{1}{-1,5} = -\dfrac{1}{1,5} = -\dfrac{1}{\frac{3}{2}} = -\dfrac{2}{3}$.



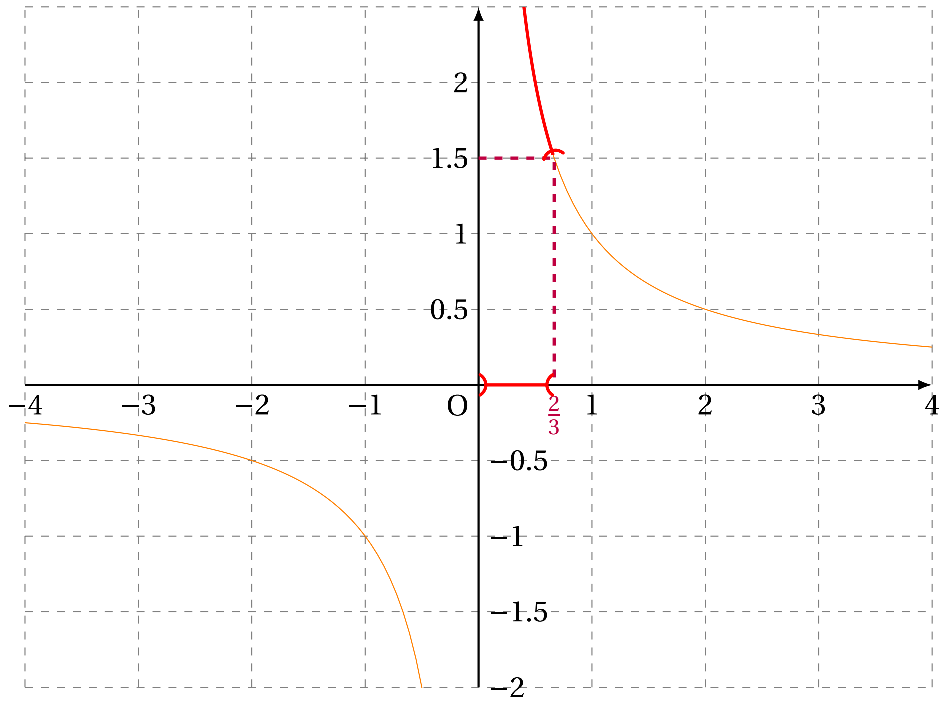

## II. 5. Inéquations

**Propriété 7**

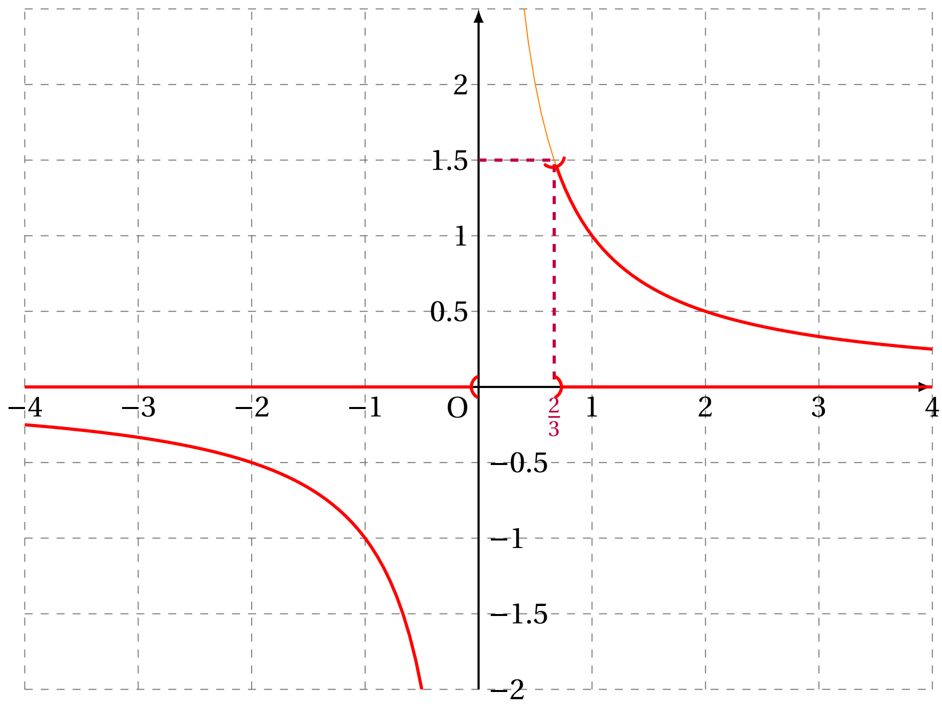
1. Si $a > 0$,
   - $\dfrac{1}{x} > a \iff x \in \left]0;\dfrac{1}{a}\right[$;
   - $\dfrac{1}{x} < a \iff x \in \left]-\infty;0\right[ \cup \left]\dfrac{1}{a};+\infty\right[$.
2. Si $a < 0$,
   - $\dfrac{1}{x} > a \iff x \in \left]-\infty;\dfrac{1}{a}\right[ \cup \left]0;+\infty\right[$;
   - $\dfrac{1}{x} < a \iff x \in \left]\dfrac{1}{a};0\right[$.

**Exemples 4**

**1.** $\dfrac{1}{x} > \dfrac{3}{2} \iff x \in \left]0\,;\dfrac{2}{3}\right[$.




**2.** $\dfrac{1}{x} < \dfrac{3}{2} \iff x \in \left]-\infty\,;0\right[ \cup \left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.



# III. La fonction cube

## III. 1. Définition

**Déf. 3** La fonction cube est la fonction qui à tout réel $x$ associe son cube $x^3$.
On la note :

$$x \longmapsto x^3.$$

**Propriété 8**

La fonction carré est impaire.

**Démonstration**

Posons $f(x) = x^3$.
$f$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble centré en 0.
De plus, pour tout réel $x$,

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1 \times x)^3 = (-1)^3 \times x^3 = -1 \times x^3 = -x^3 = -f(x)\,,$$

ce qui justifie que $f$ est impaire.

## III. 2. Sens de variation

Soient deux nombres $a$ et $b$ tels que $a < b$. Posons $f(x) = x^3$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^3 - b^3 \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

- Si on se place sur $]-\infty;0]$ alors $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$ donc $ab \geqslant 0$.
- Si on se place sur $[0;+\infty[$ alors $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ donc $ab \geqslant 0$.

Dans les deux cas, $ab \geqslant 0$; de plus, $a^2 \geqslant 0$ et $b^2 \geqslant 0$ donc $a^2 + ab + b^2 > 0$.

**Remarque.** $a$ et $b$ ne peuvent pas être égaux à 0 tous les deux car on a supposé $a < b$. Donc $a^2 + b^2 \neq 0$, et donc $a^2 + b^2 > 0$, d'où $a^2 + b^2 + ab > 0$ (l'inégalité est nécessairement stricte).

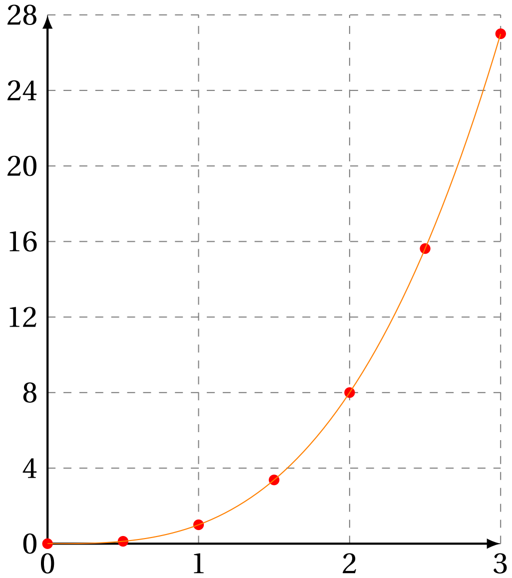
De plus, $a < b$ donc $a - b < 0$. Ainsi, $f(a) - f(b) < 0$, ce qui signifie que $f$ est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

## III. 3. Courbe représentative

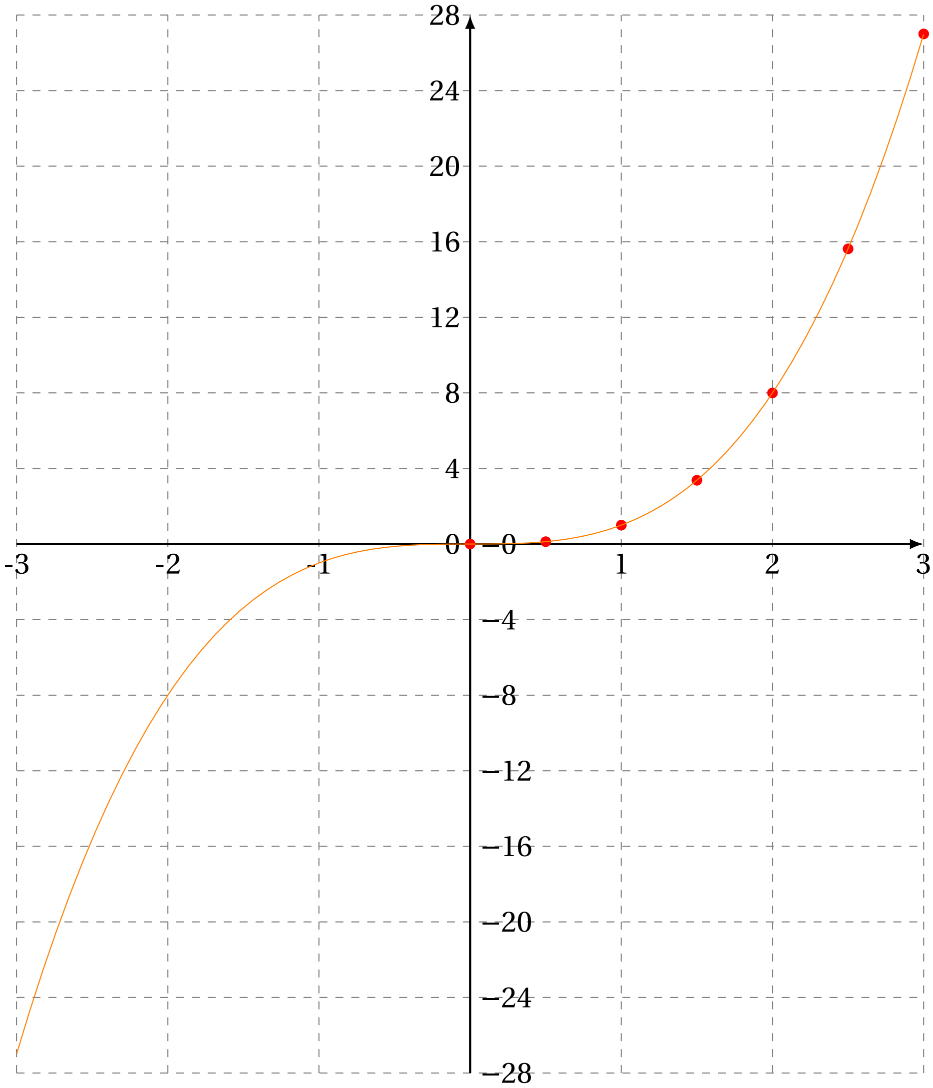
Afin de tracer la courbe représentative de la fonction cube sur un intervalle $[-3;3]$ par exemple, on peut avant tout souhaiter la tracer sur l'intervalle $]0;3]$ car la fonction est impaire (ce qui signifie que la courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère, d'où le fait de tracer la courbe uniquement sur $]0;3]$).

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 0 | 0,125 | 1 | 3,375 | 8 | 15,625 | 27 |

On obtient alors :




Par symétrie par rapport à O, on obtient la courbe représentative complète sur $[-3;3]$ :



## III. 4. Équations & inéquations

**Propriété 9**

Pour tout nombre réel $a$,

$$x^3 = a \iff x = \sqrt[3]{a}.$$

**Exemples 5**

1. $x^3 = 27 \iff x = \sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$.
2. $x^3 = -8 \iff x = \sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.

**Propriété 10**

Pour tout nombre réel $a$,

$$x^3 > a \iff x > \sqrt[3]{a}$$
$$x^3 < a \iff x < \sqrt[3]{a}$$

# IV. Racine carrée

## IV. 1. Définition

**Définition 4**

La fonction racine carrée est la fonction qui à tout réel $x$ associe sa racine carrée $\sqrt{x}$. On la note :

$$x \longmapsto \sqrt{x}.$$

Son domaine de définition est $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire $[0\,;+\infty[$.

## IV. 2. Sens de variation

Soient deux nombres positifs $a$ et $b$ tels que $a < b$. Posons $f(x) = \sqrt{x}$.

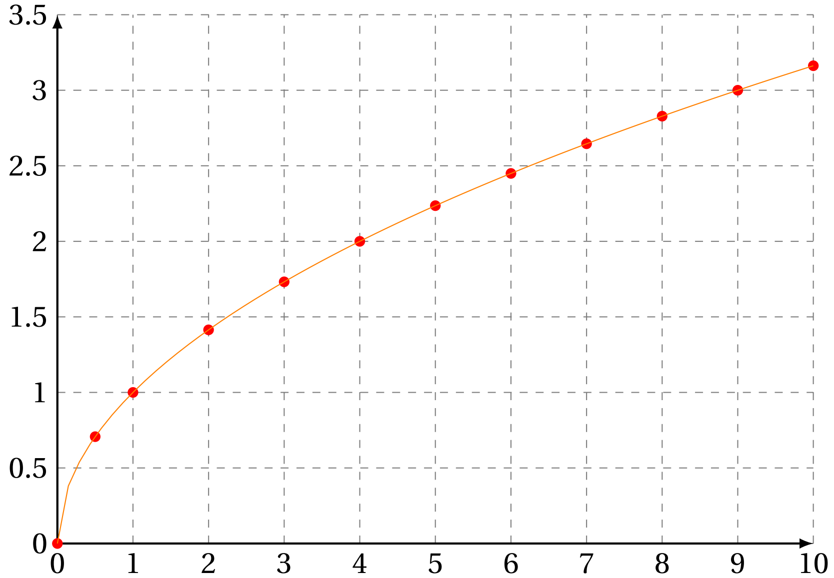
$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \sqrt{a} - \sqrt{b} \\ &= \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \end{aligned}$$

$a < b$ donc $a - b < 0$. De plus, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$. Ainsi, $f(a) - f(b) < 0$, ce qui signifie que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

## IV. 3. Courbe représentative

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 0 | 0,7 | 1 | 1,4 | 1,7 | 2 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3 | 3,2 |

On obtient alors :




## IV. 4. Équations & inéquations

**Propriété 11**

Soit $a > 0$.

$$\sqrt{x} = a \iff x = a^2$$
$$\sqrt{x} < a \iff x \in \left]0; a^2\right]$$
$$\sqrt{x} > a \iff x \in \left]a^2; +\infty\right[.$$

**Exemples 6**

1. $\sqrt{x} = 2 \iff x = 2^2 = 4$.
2. $\sqrt{x} < 3 \iff 0 < x < 9$.
3. $\sqrt{x} > 4 \iff x > 4^2 \iff x > 16$.

# V. Généralités sur les fonctions de référence

## V. 1. Ordre des images

**Propriété 12**

1. $0 < a < b \iff 0 < a^2 < b^2$ et $a < b < 0 \iff 0 < b^2 < a^2$.
2. $a < b \iff \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.
3. $a < b \iff a^3 < b^3$.
4. $0 < a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Les résultats de cette propriété viennent des variations des fonctions de référence.
Quand une fonction est croissante sur un intervalle, les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents ($x \mapsto x^2$ sur $[0;+\infty[$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt{x}$).

Au contraire, quand une fonction est décroissante sur un intervalle, les images sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents ($x \mapsto x^2$ sur $]-\infty;0]$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$).

## V. 2. Position relative des courbes

**Propriété 13**

Pour tout réel $x$ strictement compris entre 0 et 1, $x^3 < x^2 < x$.
Pour tout réel $x > 1$, $x < x^2 < x^3$.

**Démonstration**

- Soit $x \in ]0;1[$.
$$x^3 - x^2 = x^2(x-1).$$
Or, $x^2 > 0$ et $x - 1 < 0$, donc $x^2(x-1) < 0$, soit $x^3 - x^2 < 0$. Donc $x^3 < x^2$.

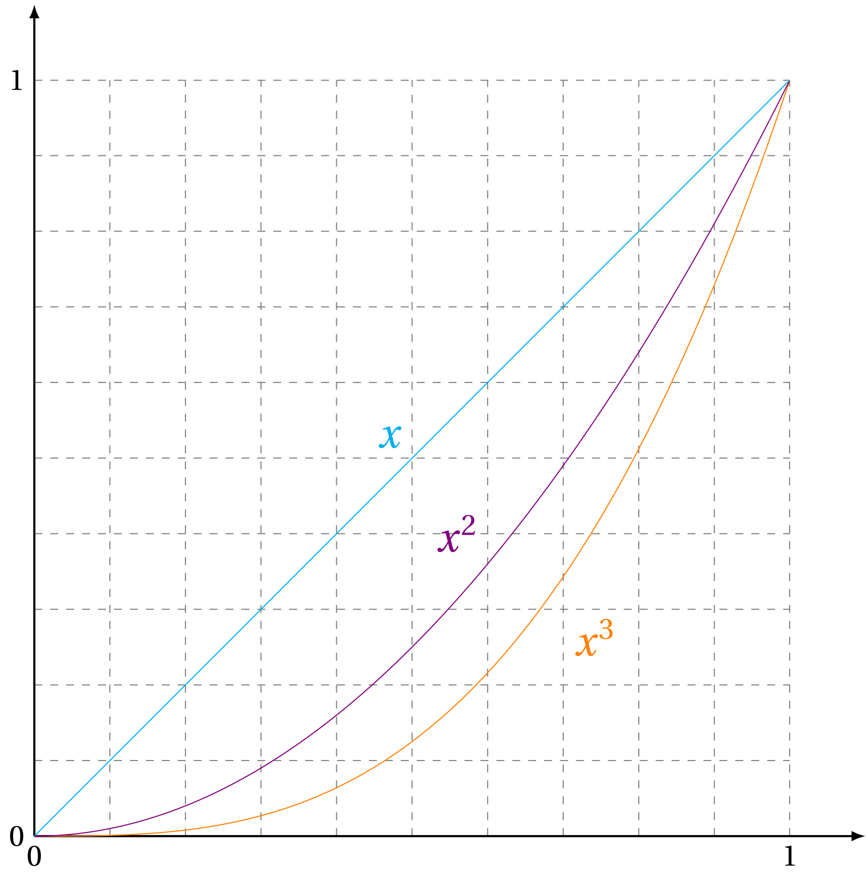
  De plus, $x^2 - x = x(x-1) < 0$ car $x > 0$ et $x - 1 < 0$. Ainsi, $x^2 < x$.

  Finalement, on obtient : $x^3 < x^2 < x$.
- Soit $x > 1$. Alors, $x^3 - x^2 = x^2(x-1) > 0$ car $x^2 > 0$ et $x - 1 > 0$. Donc $x^3 > x^2$.

  De plus, $x^2 - x = x(x-1) > 0$ car $x > 0$ et $x - 1 > 0$. Donc $x^2 > x$.

  On obtient finalement : $x^3 > x^2 > x$, que l'on peut aussi écrire : $x < x^2 < x^3$.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que sur $[0;1]$, la courbe représentative de $x \mapsto x^3$ est en-dessous de celle de $x \mapsto x^2$, qui est elle-même en-dessous de celle de $x \mapsto x$ :




Cela sous-entend notamment que si $0 < x < 1$ alors $x^2$ et $x^3$ sont plus petits que $x$.

**Propriété 14**

Pour tout réel $x$ strictement compris entre 0 et 1, $x^2 < x < \sqrt{x}$.
Pour tout réel $x > 1$, $\sqrt{x} < x < x^2$.