CHAPITRE 8

Variables aléatoires

Plan de ce chapitre

I. Introduction **2**

I. 1. Une expérience aléatoire 2

I. 2. Définition 2

I. 3. Définition plus théorique 3

II. Loi de probabilité **3**

II. 1. Définition 3

II. 2. Espérance d'une variable aléatoire 4

II. 3. Variance & écart-type d'une variable aléatoire 5

I. Introduction

I. 1. Une expérience aléatoire

Considérons une expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés cubiques non pipés (non truqués) et regardons la somme des faces obtenues. Voici les différentes possibilités que nous avons :

Dé 2 / Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Notons S la somme des deux dés. Alors, les valeurs possibles de S sont dans l'ensemble :

$$\{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}.$$

On dit ici que S est une *variable aléatoire* car sa valeur varie (d'où le mot « variable ») et ce, de façon aléatoire (car sa valeur dépend des issues obtenues dans l'expérience aléatoire).
Par abus de langage, et pour simplifier la notion, on écrira :

$$S = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}.$$

I. 2. Définition

Déf. 1

Soit $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire dont les issues possibles sont des nombres (lancers de dés, nombres de stylos dans une trousse,...).

On appelle **variable aléatoire** l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les issues de $\mathscr{E}$.

Exemples 1

1. L'univers étant une classe donnée, l'expérience consiste à regarder le nombre de stylos dans une trousse d'un élève. On constate que le nombre de stylos varie entre 5 et 10. Alors, la variable aléatoire représentant ce nombre est :

$$X = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

2. L'univers étant un lycée donné, l'expérience consiste à regarder dans chaque classe le nombre d'élèves mesurant plus de 2 mètres. On constate que ce nombre varie entre 0 et 5. Alors, la variable aléatoire représentant le nombre d'élèves de ce lycée mesurant plus de 2 mètres est :

$$X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

I. 3. Définition plus théorique

Définition 2

Soit Ω un univers probabilisé et $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire dans Ω.
Une **variable aléatoire** X est une application qui, à chaque événement élémentaires de Ω, associe un nombre réel. Autrement dit,

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

Remarques.

- En théorie, $X(\Omega)$ est un ensemble pouvant être infini. Cependant, au lycée, on se limite au cas où il est fini.
- De plus, par soucis de simplification, on notera plutôt X l'ensemble $X(\Omega)$, quitte à installer une ambiguïté entre la fonction et l'ensemble des valeurs prises par cette fonction.
- Il existe deux types de variables aléatoires réelles : discrètes et continues. En 1$^{\text{re}}$, on ne rencontrera que des variables aléatoires discrètes, c'est-à-dire où les valeurs prises sont dénombrables (des valeurs que l'on peut compter une à une).

II. Loi de probabilité

II. 1. Définition

Déf. 3

Soit X une variable aléatoire discrète.
La **loi de probabilité** de X est la donnée de la probabilité de toutes les valeurs que peut prendre X.
En général, elle est donnée sous forme de tableau.

Exemple 2

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés cubiques non pipés, où S est la variable aléatoire représentant la somme obtenue.
D'après le tableau obtenu précédemment, on peut écrire :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Par exemple, sur les 36 issues possibles , seule une donne la somme « 2 ». Donc la probabilité d'obtenir une somme égale à 2, que l'on note $P(S = 2)$, est égale à $\frac{1}{36}$.

II. 2. Espérance d'une variable aléatoire

Définition 4

Soit $X = \{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ une variable aléatoire discrète.
On appelle **espérance mathématique** de X le nombre défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)\ .$$

Remarque. Le calcul de l'espérance mathématique ressemble à celui de la moyenne d'une série statistique.
L'espérance peut alors être considérée comme la « valeur moyenne » de la variable aléatoire si on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exemple 3

Reprenons l'exemple précédent. Alors,

$$\mathbb{E}(S) = 2\times\frac{1}{36} + 3\times\frac{1}{18} + 4\times\frac{1}{12} + \cdots + 11\times\frac{1}{18} + 12\times\frac{1}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(S) = 7}$$

Cela signifie que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer obtenir en moyenne une somme égale à 7.

Propriété 1 (linéarité de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète. Soient a et b deux réels. Alors,

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b\ .$$

Démonstration

Par définition, $aX + b = \{ax_i + b\}_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b\right) \times P(aX + b = ax_i + b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b\right) \times P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} ax_i \times P(X = x_i) + \sum_{i=1}^{n} bP(X = x_i) \\
&= a\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)}_{=\mathbb{E}(X)} + b\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)}_{=1} \\
&= a\mathbb{E}(X) + b\ .
\end{aligned}$$

II. 3. Variance & écart-type d'une variable aléatoire

II. 3. a. Définitions

Définitions 5

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une variable aléatoire discrète.

- On appelle **variance mathématique** de X le nombre défini par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - \mathbb{E}(X)\right]^2 \times P(X = x_i) .$$

- On appelle **écart-type** de X le nombre défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} .$$

Exemple 4

Reprenons l'exemple précédent. Ajoutons une ligne à la loi de probabilité de S :

$S = s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S - \mathbb{E}(S)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S) &= (-5)^2 \times \frac{1}{36} + (-4)^2 \times \frac{1}{18} + (-3)^2 \times \frac{1}{2} + \cdots + 5^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{35}{6} \\ &\approx 5,83\end{aligned}$$

et donc :

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,4.$$

II. 3. b. Interprétation

Dans la formule $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$, si on élève au carré la variable $X - \mathbb{E}(X)$, c'est pour manipuler une variable positive. Cette nouvelle variable représente alors le carré de la différence entre X et son espérance.
Ainsi, la variable est l'espérance de ce carré; on peut donc l'interpréter comme la moyenne des carrés des différences entre X et $\mathbb{E}(X)$.
En prenant la racine carrée de la variance pour calculer l'écart-type, on se ramène à la moyenne des différences (en valeur absolue). Ainsi, l'écart-type représente l'écart moyen de chaque valeur de X à son espérance.

En obtenant $\mathbb{E}(S) = 7$ et $\sigma(S) \approx 2,4$, on peut conclure que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer en moyenne avoir une somme égale à 7 plus ou moins 2,4, soit une somme comprise entre 4,6 et 9,4.

II. 3. c. Théorème de König-Huygens

Théorème 1 (de König-Huygens)

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une variable aléatoire discrète. Alors,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) \quad \text{(par définition)} \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(2X\mathbb{E}(X)\right) + \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(X)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\left[\mathbb{E}(X)\right]^2 + \left[\mathbb{E}(X)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.
\end{aligned}$$

Remarque. Dans la pratique, ce théorème nous permet de calculer la variance de façon peut-être plus simple dans certains cas.

Exemple 5

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés cubiques non pipés.
Ajoutons une ligne à la loi de probabilité de S :

$S = s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S^2 = s_i^2$	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(S^2\right) &= 4 \times \frac{1}{36} + 9 \times \frac{1}{18} + 16 \times \frac{1}{2} + \cdots + 144 \times \frac{1}{36} \\
&= \frac{329}{6}.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème de König-Huygens,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S) &= \frac{329}{6} - 7^2 \\
&= \frac{35}{6} \\
&\approx 5,83
\end{aligned}$$

et donc :

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,4.$$