CHAPITRE 9

Fonctions affines & linéaires. Équations et inéquations produits.

Plan de ce chapitre

I. Fonctions affines & linéaires

I. 1. Fonctions affines (rappels de collège)

I. 1. a. Définition

Déf. 1 Une fonction f est une **fonction affine** si, pour tout réel x,

$$f(x) = mx + p \quad , \quad m \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}.$$

Une fonction affine est représentée dans un repère par une droite. Tout ce qui a été vu dans le chapitre **??** sera donc utile quand on parlera de fonctions affines.

m est donc le **coefficient directeur** de la droite représentative de la fonction, et p est l'**ordonnée à l'origine**, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

I. 1. b. Signe d'une fonction affine

Propriété 1

Soit $f(x) = mx + p$, où $m \neq 0$.

- Si $m < 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

- Si $m > 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

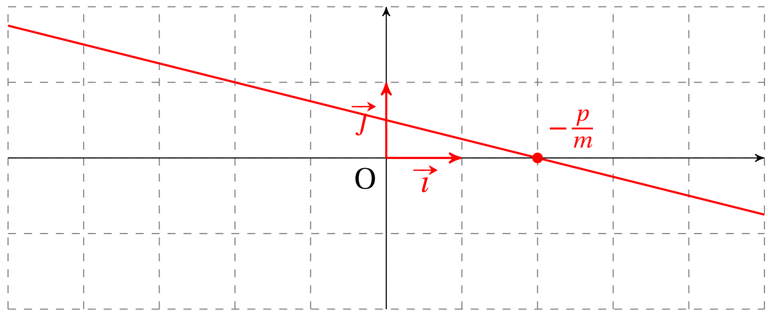
x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

En effet,

- d'une part, résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff mx + p = 0 \\ &\iff mx = -p \\ &\iff x = -\frac{p}{m} \text{ car } m \neq 0. \end{aligned}$$

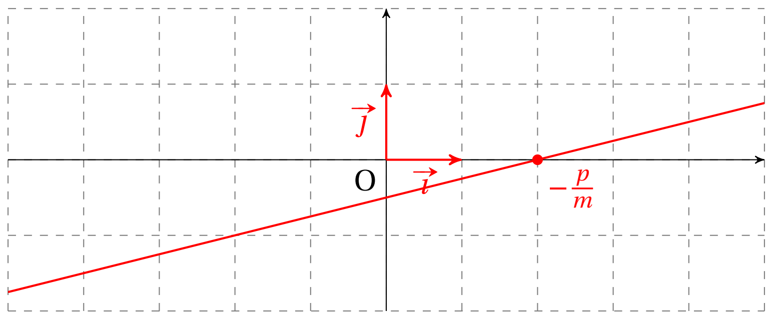
- d'autre part, si $m < 0$ alors la fonction est décroissante. On a donc la situation suivante :



La droite est **au-dessus** de l'axe des abscisses pour $x < -\dfrac{p}{m}$, ce qui signifie que $f(x) > 0$ sur $\left]-\infty ; -\dfrac{p}{m}\right[$, et donc $f(x) < 0$ sur $\left]-\dfrac{p}{m} ; +\infty\right[$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Et si $m > 0$, la fonction est croissante :



La droite est **au-dessus** de l'axe des abscisses pour $x < -\dfrac{p}{m}$, ce qui signifie que $f(x) > 0$ sur $\left]-\infty ; -\dfrac{p}{m}\right[$, et donc $f(x) < 0$ sur $\left]-\dfrac{p}{m} ; +\infty\right[$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Remarque. Dans le cas où $m = 0$, $f(x) = p$ donc $f(x)$ est du signe de p sur $\mathbb{R}$.

I. 2. Fonctions linéaires

Déf. 2 Une fonction f est une **fonction linéaire** si pour tout réel x,

$$f(x) = mx \quad , \quad m \in \mathbb{R}.$$

C'est un cas particulier de fonctions affines.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

Propriété 2

Soit $f(x) = mx$, avec $m \neq 0$.

- Si $m < 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

- Si $m > 0$ alors le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

II. Équations-produits (rappels)

Déf. 3 Une **équation-produit** (sous-entendu *équation-produit nul*) est une équation dont un membre est le produit de plusieurs fonctions affines ou linéaires et dont le second membre est le nombre 0.

Exemples 1

1. $(2x-1)(3x+8) = 0$ est une équation-produit. Le membre de gauche est le produit des fonctions affines $x \longmapsto 2x-1$ et $x \longmapsto 3x+8$.
2. $-2x(5-3x)$ est aussi une équation-produit. Le membre de gauche est le produit de la fonction linéaire $x \longmapsto -2x$ et de la fonction affine $x \longmapsto 5-3x$.

Théorème 1 (du produit nul – TPN)

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Exemple 2

$$\begin{aligned}(2x-1)(3x+8) = 0 &\iff 2x-1=0 \quad \text{ou} \quad 3x+8=0\\ &\iff 2x = 1 \quad \text{ou} \quad 3x=-8\\ &\iff x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(2x-1)(3x+8) = 0$ est donc $S = \left\{\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{8}{3}\right\}$.

III. Inéquations-produits

III. 1. Définition et méthode de résolution

Déf. 4 Une **inéquation-produit** (sous-entendu *inéquation-produit nul*) est une inéquation dont un membre est le produit de plusieurs fonctions affines ou linéaires et dont le second membre est le nombre 0.

Exemples 3

1. $(2x-1)(3x+8) < 0$ est une inéquation-produit.
2. $(8x-7)(6x-3)(7x+1) \geqslant 0$ est une inéquation-produit.

À retenir

Pour résoudre une inéquation-produit,

- on cherche le signe de chaque facteur ;
- on dresse un tableau dans lequel chaque ligne contient les différents signes de chaque facteur (1 ligne par facteur) ;
- la dernière ligne est le signe « bilan », trouvé avec la règle des signes.

III. 2. Exemple de résolution

On souhaite résoudre l'inéquation : $(3x-5)(-7x-8) \leqslant 0$.

- **On cherche le signe de chaque facteur.**
  Pour cela, on résout les inéquations suivantes (ou on utilise la propriété 1).

$$\begin{aligned} 3x-5>0 &\iff 3x>5 \\ &\iff x>\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7x-8>0 &\iff -7x>8 \\ &\iff x<-\frac{8}{7} \end{aligned}$$

- **On en déduit le tableau de signes.**

x	$-\infty$		$-\frac{8}{7}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$7x-8$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x-5)(7x-8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit est ici négatif ou nul

Le produit est ici négatif ou nul

Donc l'ensemble solution de l'inéquation est : $S = \left]-\infty\,;-\frac{8}{7}\right] \cup \left[\frac{5}{3}\,;+\infty\right[$.

IV. Inéquations-quotients

IV. 1. Définition et méthode de résolution

Déf. 5 Une **inéquation-quotient** est une inéquation où un membre est de la forme $\dfrac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{D}(x)}$, où $\mathrm{N}(x)$ et $\mathrm{D}(x)$ sont des produits de fonctions affines.

Exemples 4

1. $\dfrac{3-2x}{7x+6} \geqslant 0$ est une inéquation-quotient.
2. $\dfrac{(8x+5)(6x-3)}{x+1} < 0$ est une inéquation-quotient.

Pour résoudre une inéquation-quotient, on procède de la même façon que pour les inéquations-produits, à ceci près que l'on doit toujours exclure sur la dernière ligne du tableau de signes les valeurs de x qui annulent le dénominateur. Cela se traduit par des **doubles barres**, symbolisées par « ‖ », au niveau des valeurs de x à exclure.

IV. 2. Exemple de résolution

On souhaite résoudre l'inéquation : $\dfrac{(7x-21)(20-5x)}{8x+16} \geqslant 0$.

En utilisant la propriété 1 pour connaître le signe des facteurs, on complète le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		3		4		$+\infty$
$7x-21$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$20-5x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$8x+16$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

On exclut $x = -2$ car le dénominateur du quotient s'annule pour cette valeur; le quotient n'est donc pas défini ici.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc : $\mathrm{S} =]-\infty\,;-2[\, \cup\, [3\,;4]$ (on exclut -2).