

Exercice 1. On considère le polynôme complexe :

$$P(z) = z^3 - iz^2 - iz - 1 - i.$$

1. Montrer que $\alpha = 1 + i$ est une racine de P .
2. En déduire la valeur des nombres a , b et c tels que :

$$P(z) = (z - \alpha)(az^2 + bz + c).$$

3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
4. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 2. On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = 2 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right] \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

On pose alors :

$$Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Donner la forme algébrique de z_1 .
2. Donner la forme trigonométrique, puis exponentielle de z_2 .
3. Donner la forme algébrique de $(z_1)^6$.
En déduire que pour tout entier naturel n , $(z_1)^{6n}$ est un réel.
4. Montrer que $z_1 z_2$ est un imaginaire pur.
5. (a) Calculer $|Z|$ et déterminer un argument de Z à 2π près.
(b) Déterminer la forme algébrique de Z .
(c) En déduire la valeur exacte de $\cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$ et $\sin \left(\frac{\pi}{12} \right)$.

Exercice 3. Soit z un nombre complexe quelconque. On pose alors :

$$z' = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2}.$$

1. Montrer que $z' \in \mathbb{R}$, quel que soit le nombre complexe z .
2. Comment choisir z pour que $z' = 0$?

Exercice 4. On pose $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$.

1. Donner la forme algébrique de $z_1 z_2$.
2. Donner la forme trigonométrique de $z_1 z_2$.
3. En déduire une formule permettant de calculer $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ en fonction de $\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$, $\sin \theta_1$ et $\sin \theta_2$.