Antilles-Guyanne, septembre 2017 (3 points)
Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 100 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{\mathrm{i}}{3}z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.
2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{A}M \leqslant r$.
   Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

Pondichéry 2017 (3 points)
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

1. On considère l'équation

$$(E): \qquad z^2 - 6z + c = 0$$

   où c est un réel strictement supérieur à 9.
   (a) Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
   (b) Justifier que les solutions de (E) sont $z_{\mathrm{A}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c-9}$ et $z_{\mathrm{B}} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{c-9}$.
2. On note A et B les points d'affixes respectives z_{A} et z_{B}.
   Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

Liban, mai 2019
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point O et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -1 + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A′ image du point A par la fonction f.
   (b) Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B′ image du point B par la fonction f.
   (c) Sur la copie, placer les points A, B, A′ et B′ dans le repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. Pour les points B et B′, on laissera les traits de construction apparents.
2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   (a) Montrer que $z' = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}$.

(b) Est-il vrai que si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

3. Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_{\text{K}} = -\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

(a) Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.

(b) Soit $z = x + \text{i}y$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.

(c) Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Métropole, septembre 2017

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(\text{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe :

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M' est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.

(a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.

(b) Sur la figure donnée en annexe page 7, on a représenté un point M sur le cercle $\mathcal{C}$. Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).

(c) Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?