Exercice 1 (probabilités - loi binomiale)

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

   On envisage les événements suivants :
   - H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   - H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   - H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   - C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   - F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

   (b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

   (c) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

   (d) L'arbre choisi est un conifère.
   Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
   On arrondira à 10^{-3}.

   (c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
   On arrondira à 10^{-3}.

3. On considère la fonction Python suivante :

```
from scipy.stats import binom

def seuil(n,p):
    k = 0
    while binom.cdf(k,n,p) <= 0.7:
        k = k + 1

    return k
```

   On admet que `binom.cdf(k,n,p)` retourne la valeur de $P(X \leqslant k)$ quand X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

   Quelle est la valeur renvoyée par `seuil(10 , 0.525)` ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

mathweb.fr

Exercice 2 (suites)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n,

   $$u_n \leqslant n + 3.$$

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}\left(n + 3 - u_n\right).$$

   (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n,

   $$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

   (a) Compléter le programme Python suivant afin qu'il affiche la valeur de T_{1000}.

```
def T(n):
    s = ...
    for k in range(n+1):
        s = ...

    return s / n**2

print( S(1000) )
```

   (b) Exprimer S_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (T_n).

mathweb.fr