Limites de fonctions

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 24 décembre 2020

(https://cours-particuliers-bordeaux.fr) (https://mathweb.fr)

Limites usuelles

Fractions

$$n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$$

$$n \in \mathbb{N},\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty \qquad n \in \mathbb{N},\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Exponentielle & logarithme népérien

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} x\mathrm{e}^x = 0 \qquad n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \qquad n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

Formes indéterminées

$\infty - \infty$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$ (quand x tend vers un infini)

On factorise par le terme « le plus fort » (de plus haut degré dans le cas des polynômes).

Exemple 1. $f(x) = x^2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{2x} = x\mathrm{e}^{2x}\left(x\mathrm{e}^{-x} - 1\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{2x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0\end{array}\right\} \overset{\text{(par produit)}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemple 2. $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^{2x} + 3} = \dfrac{x\mathrm{e}^x\left(1 + \frac{1}{x\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^{2x}\left(1 + 3\mathrm{e}^{-2x}\right)} = \dfrac{x\left(1 + \frac{1}{x\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1 + 3\mathrm{e}^{-2x}\right)}$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\mathrm{e}^x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^{-2x} = 0\end{array}\right\} \overset{\text{(par produit)}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

$0 \times \infty$

On se ramène au cas « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » car « $0 \times \infty = \dfrac{1}{\infty} \times \infty = \dfrac{\infty}{\infty}$ ».

$\frac{0}{0}$ (quand x tend vers un nombre fini)

On peut se ramener à un taux d'accroissement ou, si c'est possible, multiplier par l'expression conjuguée (quand il y a au moins une racine carrée).

Exemple 3. Limite quand $x \to 0$ de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x}} = \dfrac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x+4}+2)} = \dfrac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+4}+2)} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}+2}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\sqrt{0}}{\sqrt{0+4}+2} = 0$.

Exemple 4. Limite quand $x \to 0$ de $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x-0} \times \dfrac{x-0}{\sin x - \sin 0}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x-0} = u'(0) = 1$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0} = v'(0) = 1$ avec $v(x) = \sin x$ et $v'(x) = \cos x$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-0}{\sin x - \sin 0} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x-0} \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-0}{\sin x - \sin 0} = 1 \times 1 = 1$.

Théorème de composition

$f(x) = u[v(x)]$. Si $\lim\limits_{x\to a} v(x) = b$ et si $\lim\limits_{X\to b} u(X) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Exemple 5. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+3}{x-5}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{x+3}{x-5}}_{X} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 1} \mathrm{e}^X = \mathrm{e}^1 \end{array}\right\} \overset{\text{(par composition)}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^1.$$

Théorème de comparaison

$\boxed{f(x) \leqslant u(x) \text{ et } \lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty}$

$\boxed{v(x) \leqslant f(x) \text{ et } \lim\limits_{x\to a} v(x) = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty}$

Exemple 6. $f(x) \geqslant \mathrm{e}^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème des gendarmes (théorème d'encadrement)

$$\boxed{u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x) \text{ et } \lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = \ell \text{ donc } \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell}$$

Exemple 7. $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Asymptotes

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$ alors la droite d'équation $y = a$ est asymptote (horizontale) à la courbe représentative de f.

Si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = b$ est asymptote (verticale) à la courbe représentative de f.