

Multiples, diviseurs et nombres premiers

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 6 mai 2021

(<https://coursapasquet.fr>)

(<https://mathweb.fr>)

Critères de divisibilités

- Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.
Exemple : 252, 1000, 878 sont divisibles par 2.
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3.
Exemple : $543 \rightarrow 5 + 4 + 3 = 12$ et 12 est dans la table de 3, donc 543 est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 4 si ses deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4.
Exemple : 458216 est divisible par 4 car « 16 » l'est aussi.
- Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.
Exemple : 545 et 850 sont divisibles par 5.
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 9.
Exemple : 981 est divisible par 9 car $9 + 8 + 1 = 18$, et 18 est divisible par 9.

Propriété

Si p et q sont premiers entre eux, et si n est divisible par p et par q , alors n est divisible par $p \times q$.

Exemple : 12 est divisible par 2 et par 3, donc il est aussi divisible par 6 (car 2 et 3 sont premiers entre eux : ils n'ont pas de diviseurs communs autre que 1).

PPCM

Le PPCM de deux nombres entiers a et b est le plus petit multiple commun à a et b .

Exemple : $\text{ppcm}(12; 15) = 60$ car :

- les multiples de 12 sont : 12, 24, 36, 48, **60**, 72, ...
- les multiples de 15 sont : 15, 30, 45, **60**, 75, ...

PGCD

Le PGCD de deux nombres a et b est le plus grand diviseur commun à a et à b .

Exemple : $\text{pgcd}(12; 15) = 3$ car :

- les diviseurs de 12 sont : 1, 2, **3**, 6, 12.
- les diviseurs de 15 sont : 1, **3**, 5, 15

Algorithme d'Euclide

Permet de calculer le PGCD de deux nombres.

Exemple : calcul de $\text{pgcd}(125; 35)$.

$$\begin{aligned}125 &= 3 \times 35 + 20 \\35 &= 1 \times 20 + 15 \\20 &= 1 \times 15 + 5 \\15 &= 3 \times 5 + 0\end{aligned}$$

$\text{pgcd}(125; 35) = 5$ (dernier reste non nul).

Nombres premiers

Définition

Un nombre premier est un entier divisible uniquement par 1 et lui-même.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Décomposition en produit de facteurs premiers

Décomposons le nombre 360 en produit de facteurs premiers :

	360	2	← on divise par 2 car 360 est pair
résultat de $360 \div 2 \rightarrow$	180	2	← on divise par 2 car 180 est pair
résultat de $180 \div 2 \rightarrow$	90	2	← on divise par 2 car 90 est pair
résultat de $90 \div 2 \rightarrow$	45	3	← on divise par 3 car 45 n'est plus divisible par 2, donc on passe au nombre premier suivant
résultat de $45 \div 3$	15	3	← on continue à diviser par 3
résultat de $15 \div 3$	5	5	← on passe à 5, qui vient après 3
résultat de $5 \div 5$	1	1	← on s'arrête quand on obtient 1.

Donc $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.