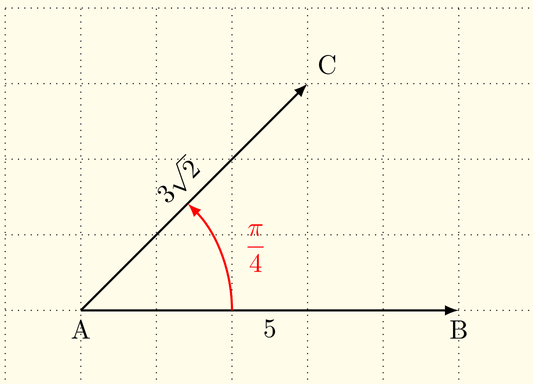
Produit scalaire

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 6 mai 2021

(https://courspasquet.fr) (https://mathweb.fr)

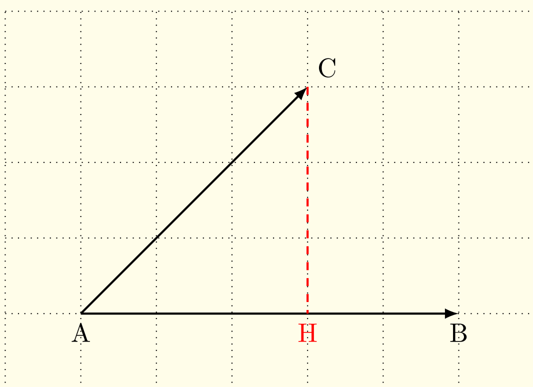
Les différentes formules



$$\boxed{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)}$$

Exemple :

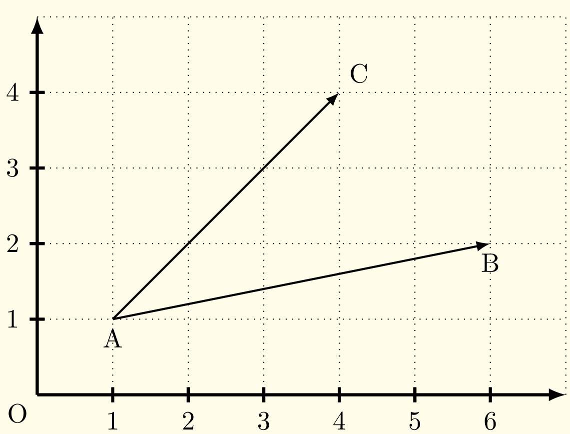
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} &= \text{AB} \times \text{AC} \times \cos\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)\\ &= 5 \times 3\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4}\\ &= 15\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= 15.\end{aligned}$$



$$\boxed{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \begin{cases} AH \times AB & \text{si } 0 \leqslant \left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -AH \times AB & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant \left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) \leqslant \pi \end{cases}}$$

Exemple :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} &= AH \times AB\\ &= 5 \times 3\\ &= 15.\end{aligned}$$



$$\boxed{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = xx' + yy' \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}}$$

Exemple : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} &= 5 \times 3 + 1 \times 3\\ &= 15 + 3\\ &= 18.\end{aligned}$$

Remarque : à l'aide de la première et de la dernière formule, on peut calculer l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ pour le dernier exemple. En effet, $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 18 = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$. On en déduit alors que :

$$\cos\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \frac{18}{AB \times AC} = \frac{18}{\sqrt{5^2+1^2} \times \sqrt{3^2+3^2}} \approx 0,832050294338.$$

D'où $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) \approx \cos^{-1}(0,832050294338) \approx 34°$.

Propriétés générales

Orthogonalité : $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

Distributivité : $\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}}$

Commutativité : $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$

Bilinéarité : $\boxed{(k_1 \vec{u}) \cdot (k_2 \vec{v}) = (k_1 \times k_2) \vec{u} \cdot \vec{v}}$

Propriétés avec les normes

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$$

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right) \end{aligned}}$$