Suites

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 6 mai 2021

(https://courspasquet.fr) (https://mathweb.fr)

Généralités

Définition

Une suite est une fonction à variable entière. Elle peut être définie de deux manières :

- *de façon explicite*, avec une expression.
  Par exemple : $u_n = n^2 + 6$;
- *par récurrence*, en exprimant un terme en fonction de son précédent.
  Par exemple, $u_{n+1} = 5 + u_n$, qui signifie qu'un terme est égal à 5 de plus que son précédent. Dans ce cas, il faut toujours connaître un terme (par exemple u_0) pour en déduire les autres.

Sens de variation

On calcule $u_{n+1} - u_n$ et on regarde le signe du résultat.

- Si $u_{n+1} - u_n > 0$ alors $u_{n+1} > u_n$, donc la suite (u_n) est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$ alors $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.

Exemple 1 : $u_n = n^2 + n + 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left[(n+1)^2 + (n+1) + 1\right] - \left[n^2 + n + 1\right] \\ &= \left[n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 1\right] - \left[n^2 + n + 1\right] \\ &= \left[n^2 + 3n + 3\right] - \left[n^2 + n + 1\right] \\ &= n^2 + 3n + 3 - n^2 - n - 1 \\ &= 2n + 2 > 0. \end{aligned}$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

Exemple 2 : $u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n + 2$, avec $u_0 = 2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (u_n^2 + 3u_n + 2) - u_n \\ &= u_n^2 + 2u_n + 2 \\ &= (u_n^2 + 2u_n + 1) + 1 \\ &= (u_n + 1)^2 + 1 > 0 \\ &\text{car un carré est toujours positif ou nul.} \end{aligned}$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

Majorants et minorants

M est un majorant d'une suite (u_n) si, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.
M est un minorant d'une suite (u_n) si, pour tout entier n, $u_n \geqslant M$.

Exemple 3 : $u_n = 3 - \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{n} < 1 &\iff -1 < -\frac{1}{n} < 0 \\ &\iff 2 < 3 - \frac{1}{n} < 3 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est minorée par 2, et majorée par 3. La suite est *bornée*.

Suites arithmétiques

Définition

Une suite est arithmétique si la différence de deux termes consécutifs quelconques est constante : $u_{n+1} - u_n = r$.

Formule de récurrence

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Terme général en fonction de n

$$\boxed{\begin{aligned} &u_n = u_0 + nr \\ &u_n = u_1 + (n-1)r \\ &u_n = u_p + (n-p)r,\ p \in \mathbb{N} \end{aligned}}$$

Somme des n premiers entiers

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Somme des n+1 premiers termes

$$\boxed{\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_n &= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} \\ &= (n+1) \times \left(u_0 + \frac{1}{2}nr\right) \end{aligned}}$$

Suites géométriques

Définition

Une suite est géométrique si le rapport de deux termes consécutifs quelconques est constant : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Formule de récurrence

$$\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$$

Terme général en fonction de n

$$\boxed{\begin{aligned} &u_n = u_0 \times q^n \\ &u_n = u_1 \times q^{n-1} \\ &u_n = u_p \times q^{n-p},\ p \in \mathbb{N} \end{aligned}}$$

Somme des n+1 premières puissances de q

$$\boxed{1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1}$$

Somme des n+1 premiers termes

$$\boxed{u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$