Factorisations

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 1er février 2021

(https://cours-particuliers-bordeaux.fr) (https://mathweb.fr)

Principe

Factoriser une expression, c'est la transformer en produit.

Exemple 1 : $A = 3x + 5x$ est sous la forme développée (car il y a un « + » entre les deux termes).
Pour la factoriser, on remarque qu'il y a un **facteur commun** dans les deux termes :

$$A = 3\boldsymbol{x} + 5\boldsymbol{x} = (3+5)\boldsymbol{x} = 8x.$$

$A = 8x$ est l'expression sous la forme factorisée car elle est sous la forme d'un produit.

Factorisations avec facteur commun

Exemple 2 : on souhaite factoriser $B = (2x+3)(x-5) - (x+5)(4x+6)$.

- **Étape 1 :** on repère le facteur commun et s'il n'y en a pas, on le fait apparaître.
Ici, on remarque que $4x + 6 = 2(2x + 3)$ donc B peut s'écrire sous la forme :

$$B = (2x+3)(x-5) - (x+5) \times 2(2x+3)$$
$$B = (2x+3)(x-5) - 2(x+5)(2x+3)$$

- **Étape 2 :** on encadre le facteur commun.

$$B = \boxed{(2x+3)}(x-5) - 2(x+5)\boxed{(2x+3)}$$

- **Étape 3 :** on écrit le facteur commun en début d'expression, puis on ouvre des crochets à l'intérieur desquels on écrit ce qu'il y a en dehors des cadres.

$$B = (2x+3)\big[(x-5) - 2(x+5)\big]$$

- **Étape 4 :** on enlève les parenthèses dans les crochets en développant si besoin est.

$$B = (2x+3)\big[x - 5 - 2x - 10\big]$$

- **Étape 5 :** on réduit ce qu'il y a dans les crochets (on calcule) et on transforme les crochets en parenthèses (car il n'y a plus de parenthèses à l'intérieur donc inutile de laisser des crochets). On obtient alors la factorisation.

$$\boxed{B = (2x+3)(-x-15)}$$

Factorisations avec identités remarquables

Rappels

Forme développée = Forme Factorisée
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Avec l'une des identités $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$

Exemple 3 : on souhaite factoriser $C = 9x^2 + 25 - 30x$.
Il n'y a pas de facteur commun donc c'est nécessairement une identité remarquable.
Il y a 3 termes et un signe « $-$ », donc c'est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$.
On remarque que : $9x^2 = (3x)^2$ et $25 = 5^2$ donc :

$$C = (3x)^2 - 30x + 5^2$$
$$C = \underbrace{(3x)^2}_{a^2} - \underbrace{2 \times (3x) \times 5}_{2ab} + \underbrace{5^2}_{b^2}$$
$$\boxed{C = (3x-5)^2}$$

Avec $(a-b)(a+b)$

Exemple 4 : on souhaite factoriser $D = 49 - 81x^2$.
Il n'y a que deux termes (séparés par un « $-$ ») et il n'y a aucun facteur commun : c'est donc une identité remarquable.

$$D = 49 - 81x^2$$
$$D = \underbrace{7^2}_{a^2} - \underbrace{(9x)^2}_{b^2}$$
$$\boxed{D = (7-9x)(7+9x)}$$

Exemple 5 : on souhaite factoriser $E = 25x^2 - 7$.
Il n'y a que deux termes séparés par un signe « $-$ » et sans facteur commun, donc c'est de la forme $a^2 - b^2$.

$$E = (5x)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2$$
$$\boxed{E = \left(5x - \sqrt{7}\right)\left(5x + \sqrt{7}\right)}$$

Remarque : tout nombre positif peut être considéré comme le carré de sa racine carrée : $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$ pour $a \geqslant 0$.